اجب بصحيح او خطا مع التبرير لكل من المعلومات التالية:

1) $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{AI} = 0,5$

2) $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} . \overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{IC}$

4) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{IJ} = AB . IC \cos \frac{\pi}{3}$

نزود الآن الفضاء بمعلم متعامد ومتجانس $(A ، \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AD} ، \overrightarrow{AE})$

5- معادلة المستوي (EIJ) هي $6x-7y+8z-3=0$

6- معادلة المستوي (EFI) هي $x=0$.

7- الشعاع الذي إحداثياته $(2 ، 1 ، -4)$ ناظم للمستوي (FIJ) .

8- حجم الرباعي الوجوه $(EFIJ)$ يساوي $\frac{1}{6}$.

30 - $ABCDEFGH$ مكعب نرمز له بـ (Γ) طول حرفه a .

ليكن (T) رباعي الوجوه $AFCH$.

1-ا) بين أن وجوه الرباعي $AFCH$ مكونة من مثلثات متقايسة الأضلاع.

ب) بين أن الحجم V_1 لرباعي الوجوه $AEFH$ يساوي $\frac{a^3}{6}$.

جـ) بين ان الحجم V_2 لرباعي الوجوه $AFCH$ يساوي $\frac{a^3}{3}$.

د) استنتج مسافة النقطة A عن المستوي (HFC) .

2- نعزل رباعي الوجوه $AFCH$ ولتكن J منتصف $[FC]$

ا) بين أن المستقيمين (AH) و (FC) متعامدان.

ب) احسب $\overrightarrow{JA} . \overrightarrow{JH}$ بدلالة a ، ثم استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للزاوية $A\hat{J}H$.

الدرس 13

المستقيمات والمستوي

1. مرجح نقط

1-1 مرجح نقطتين

تعريف

A و B نقطتان و α ، β عددان حقيقيان بحيث $\alpha+\beta \neq 0$ عندئذ توجد نقطة وحيدة G من الفضاء بحيث $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

النقطة G تسمى مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالعاملين α و β على الترتيب.

نتيجة

- مرجح نقطتين A و B مرفقتين بنفس العامل غير المعدوم هو منتصف $[AB]$.
- المرجح G للنقطتين المختلفتين A و B ينتمي إلى المستقيم (AB)
- إذا كان α و β لهما نفس الإشارة فإن G تنتمي إلى $[AB]$
- إذا كان α و β مختلفان في الإشارة فإن G تقع خارج $[AB]$

خاصية

إذا كان G مرجح الجملة المثقلة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ مع $\alpha+\beta \neq 0$ فإنه من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

مثال -

A ، B ، C ثلاث نقط موضوعة كما في الشكل :

1) اوجد العددين الحقيقيين α و β بحيث تكون النقطة A مرجح النقطتين B و C المرفقتين بالعاملين α و β على التوالي

2) انشئ G مرجح الجملة $\{(A,3),(B,-2)\}$.

✔ الحل :

1) الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا و $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$

إذن $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ ومنه نستنتج ان A هي مرجح الجملة $\{(B,2),(C,1)\}$

2) القول أن G هي مرجح الجملة $\{(A,3),(B,-2)\}$

يكافئ القول أن $3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ أي $\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{AB}$ ومنه فإن G منطبقة على C

1 - 2 مرجح ثلاث نقط أو أكثر

تعريف

لتكن A ، B ، C ثلاث نقط و α ، β ، γ أعداد حقيقية بحيث $\alpha+\beta+\gamma\neq0$ وعندئذ توجد نقطة وحيدة G من الفضاء بحيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

هذه النقطة هي مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$

خاصية 1

إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ مع $\alpha+\beta+\gamma\neq0$

فإنه من أجل كل نقطة M من الفضاء (M تنتمي إلى المستوي (ABC)) يكون :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

مبرهنة

لتكن ثلاث نقط A ، B ، C وثلاثة أعداد حقيقية α ، β ، γ بحيث $\alpha+\beta+\gamma\neq0$

إذا كان $\alpha+\beta\neq0$ فإن مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ هو نفسه مرجح الجملة $\{(H,\alpha+\beta),(C,\gamma)\}$ مع H مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$

خاصية 2

1) المرجح لا يتغير إذا ضربنا أو قسمنا معاملات النقط في أو على عدد حقيقي غير معدوم.

2) إذا كانت A ، B ، C إحداثياتها (x_A,y_A,z_A) ، (x_B,y_B,z_B) و (x_C,y_C,z_C) على التوالي في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ فإن إحداثيات G مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ مع $\alpha+\beta+\gamma\neq0$ هي :

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ و } y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \text{ و } z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

3) إذا لم تكن النقط A ، B ، C على استقامة واحدة فإن مرجحها ينتمي إلى المستوي (ABC)

4) إذا لم تكن النقط A ، B ، C على استقامة واحدة ومرفقة بمعاملات لها نفس الإشارة فإن مرجحها G يقع داخل المثلث ABC .

تمرين تدريبي 1

$ABCD$ رباعي وجوه، أنشئ G مرجح الجملة $\{(A,2),(B,3),(C,5),(D,10)\}$

✔ الحل

نجمع A و B لأن مجموع معاملاتهما يختلف عن الصفر.

ولتكن I مرجح A و B المرفقتين بـ 2 و 3 على الترتيب

تحقق $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

ومنه نستنتج $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

نجمع I و C لأن مجموع معاملاتهما يختلف عن الصفر.

بما أن I و C لهما نفس العامل 5 فإن مرجحهما J منتصف $[IC]$

بما أن J و D لهما نفس العامل 10 فإن مرجح النقطتين J و D هو منتصف $[DJ]$

تمرين تدريبي 2

ABC مثلث ، ولتكن النقط I ، J ، K منتصفات القطع $[BC]$ ، $[CA]$ ، $[AB]$ على التوالي. بين أن متوسطات هذا المثلث متقاطعة.

✔ الحل

بما أن I منتصف $[BC]$ هي مرجح الجملة $\{(B,1),(C,1)\}$

فإن G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ هي نفسها مرجح الجملة $\{(A,1),(I,2)\}$

إذن G هي نقطة من المستقيم (AI)

بما أن J منتصف $[CA]$ هي مرجح الجملة $\{(A,1),(C,1)\}$

فإن G مرجح الجملة $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$ هي نفسها مرجح الجملة $\{(B,1),(J,2)\}$

إذن G هي نقطة من المستقيم (BJ).

بنفس الكيفية نبين أن G تنتمي إلى المستقيم (CK)

إذن G تنتمي إلى تقاطع المستقيمات (AI) ، (BJ) و (CK).

❷ التمييز المرجحي

2-1 التمييز المرجحي لمستقيم وقطعة

في الفضاء كما في الهندسة المستوية.

- المستقيم (AB) هو مجموعة النقط M بحيث $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$ مع t يمسح $\mathbb{R}$.
- القطعة $[AB]$ هي مجموعة النقط M بحيث $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}$ مع t يمسح المجال $[0,1]$

مبرهنة

1) المستقيم (AB) هو مجموعة النقط M مراجح الجملة $\{(A,1-t),(B,t)\}$ مع t عدد حقيقي كيفي.

2) القطعة $[AB]$ هي مجموعة النقط M مراجح الجملة $\{(A,1-t),(B,t)\}$ مع t عدد حقيقي كيفي من $[0,1]$.

الإثبات

t عدد حقيقي كيفي.

القول أن M هي مرجح الجملة $\{(A,1-t),(B,t)\}$ يكافئ القول أن :

$$\overrightarrow{AM}=\frac{t}{(1-t)+t}\,\overrightarrow{AB}=t\,\overrightarrow{AB}$$

وعليه المستقيم (AB) هو مجموعة مراجح الجملة $\{(A,1-t),(B,t)\}$ لما t يمسح $\mathbb{R}$

$[AB]$ هي مجموعة مراجيح الجملة $\{(A,1-t),(B,t)\}$ لما t يمسح $[0,1]$

ملاحظة

القطعة $[AB]$ تمثل كذلك مجموعة كل مراجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$
مع α و β عددان حقيقيان موجبان تماما.
لأن المرجح M للجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ هو مرجح الجملة :
$\left\{\left(A,\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right),\left(B,\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\right\}$ أي $\{(A,1-t),(B,t)\}$ مع $t=\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ و $t\in[0,1]$

تمرين تدريبي

$ABCD$ رباعي وجوه، I و K منتصفي $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي.
J و L نقطتان بحيث $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ و G هي منتصف $[JL]$
بين أن النقط G، I و K على استقامة واحدة.

✓ الحل

لإثبات أن ثلاث نقط على استقامة واحدة يكفي أن نثبت أن واحدة منها هي مرجح الأخرتين.

من العلاقة $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ نستنتج أن L هي مرجح الجملة $\{(A,3),(D,1)\}$

ومن العلاقة $\overrightarrow{CJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ نستنتج أن J هي مرجح الجملة $\{(C,1),(B,3)\}$

لتكن G' مرجح الجملة $\{(A,3),(D,1),(C,1),(B,3)\}$
باستعمال خاصية التجميع تكون G' هي مرجح الجملة $\{(L,4),(J,4)\}$
إذن G' منطبقة على G منتصف $[JL]$.
لكن I هي مرجح $\{(A,3),(B,3)\}$
و K مرجح $\{(C,1),(D,1)\}$
إذن وحسب خاصية التجميع تكون G' هي مرجح الجملة $\{(I,6),(K,2)\}$.
وعليه G هي مرجح الجملة $\{(I,3),(K,1)\}$
إذن النقط G، I، K تقع على استقامة واحدة.



2-2 التمييز المرجحي لمستوي ومثلث

مبرهنة

لتكن A، B، C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من الفضاء.

1) كل نقطة من المستوي (ABC) هي مرجح النقط A، B، C.

2) كل نقطة تقع داخل المثلث ABC هي مرجح النقط A، B، C المرافقة بمعاملات موجبة تماما.

الإثبات

1) لتكن M نقطة من المستوي (ABC)، الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM}$ من نفس المستوي

وعليه يوجد عددان حقيقيان x و y بحيث $\overrightarrow{AM}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AM}=x(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})+y(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})$$

$$\overrightarrow{AM}=x\,\overrightarrow{AM}+x\,\overrightarrow{MB}+y\,\overrightarrow{AM}+y\,\overrightarrow{MC}$$

$$-\overrightarrow{AM}+x\,\overrightarrow{AM}+y\,\overrightarrow{AM}+x\,\overrightarrow{MB}+y\,\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

$$(-1+x+y)\,\overrightarrow{AM}+x\,\overrightarrow{MB}+y\,\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$

إذن $(1-x-y)\,\overrightarrow{MA}+x\,\overrightarrow{MB}+y\,\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

بما أن $(1-x-y)+x+y=1\neq 0$ فإن M هي مرجح الجملة $\{(A,1-x-y),(B,x),(C,y)\}$

2) لتكن M مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ مع $\alpha \rangle 0$ و $\beta \rangle 0$ و $\gamma \rangle 0$

ولتكن I مرجح الجملة $\{(B,\beta),(C,\gamma)\}$ عندئذ I تنتمي إلى $]BC[$.

وحسب خاصية التجميع فإن M هي مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(I,\beta+\gamma)\}$

وبما أن $\alpha \rangle 0$ و $\beta+\gamma \rangle 0$ فإن M تنتمي إلى $]AI[$

إذن M تقع داخل المثلث ABC.

وبالعكس :

إذا كانت نقطة M تقع داخل المثلث ABC فإن المستقيم (AM) يقطع (BC) في النقطة I حيث I تنتمي إلى $]BC[$.

إذن يوجد عددان حقيقيان $\beta \rangle 0$ و $\gamma \rangle 0$ بحيث I هي مرجح $\{(B,\beta),(C,\gamma)\}$.

لكن M تقع على $]AI[$ إذن يوجد عدد حقيقي $\alpha \rangle 0$ بحيث M هو مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(I,\beta+\gamma)\}$

وحسب خاصية التجميع فإن M هي مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$

تمرين تدريبي

$ABCD$ رباعي وجوه، بين أن النقط D، C، B، M تنتمي إلى نفس المستوي معينا موضع النقطة M بحيث $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$

✓ الحل

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DA}=\vec{0} \quad \text{.............. (1)}$$

- نعتبر الجملة $\{(B,1),(C,1),(D,1)\}$

بما أن مجموع معاملات النقط B، C، D لا يساوي الصفر فإن النقطة M هي مرجح الجملة $\{(B,1),(C,1),(D,1)\}$

إذن النقطة M تنتمي إلى المستوي (BCD).

ومنه فإن النقط M، B، C، D تنتمي إلى نفس المستوي (BCD)

العلاقة (1) تصبح :

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$$

$$3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$ حيث $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$

③ - التمثيل الوسيطي

3-1 التمثيل الوسيطي لمستقيم - قطعة مستقيمة ونصف مستقيم

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

مبرهنة

ليكن (d) مستقيم مار بالنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(a,b,c)$ مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

النقطة M ذات الإحداثيات (x,y,z) تنتمي إلى (d) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث

$$(S)\begin{cases}x=x_0+ta\\y=y_0+tb\\z=z_0+tc\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$

الإثبات

M تنتمي إلى (d) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$ .... (1)

إذا كانت إحداثيات M هي (x,y,z) فإن إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AM}$ هي : $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ والشعاع $t\vec{u}$ إحداثياته (ta,tb,tc)

إذن ومن المساواة (1) نستنتج $\begin{cases}x-x_0=ta\\y-y_0=tb\\z-z_0=tc\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=x_0+ta\\y=y_0+tb\\z=z_0+tc\end{cases}$

ملاحظة

1) الجملة (S) تسمى بالتمثيل الوسيطي للمستقيم (d) في المعلم المتعامد والمتجانس.

2) المستقيم (d) ليس له تمثيل وسيطي وحيد لأنه متعلق باختيار $\vec{u}$ و A.

3) إذا كتب التمثيل الوسيطي لمستقيم (d) على الشكل (S) فيمكننا حينها القول أن الشعاع $\vec{u}(a,b,c)$ هو شعاع توجيه (d) وأن النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ تنتمي إلى (d)

4) من أجل كل عدد حقيقي t نرفق النقطة الوحيدة $M(x_0+ta, y_0+tb, z_0+tc)$ من (d) وبالعكس من أجل كل نقطة M من (d) توافق عدد حقيقي وحيد t بحيث $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

نتيجة

A و B نقطتان مختلفتان من الفضاء، نضع $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$

- انتماء نقطة M إلى القطعة $[AB]$ يعني أن إحداثياتها تحقق (S) مع $t\in[0,1]$
- انتماء النقطة M إلى نصف المستقيم $[AB)$ يعني أن إحداثياتها تحقق (S) و $t\in[0,+\infty[$.

تمرين تدريبي

(d) مستقيم تمثيله الوسيطي (S) $\begin{cases} x=6-2t \\ y=-1+6t \\ z=1+2t \end{cases}$ مع $t \in \mathbb{R}$.

1) هل النقطة $A(4,5,2)$ تنتمي إلى (d) ؟

2) لتكن النقطتان $B(2,6,0)$ و $C(4,0,-2)$

هل المستقيم (d) يوازي (BC) ؟

3) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) .

✓ الحل

1) A تنتمي إلى (d) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي وحيد t يحقق الجملة :

$$(\mathrm{I}) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} x_A=6-2t \ \ldots & (1) \\ y_A=-1+6t \ \ldots & (2) \\ z_A=1+2t \ \ldots & (3) \end{cases}$$

من (1) نجد $t=1$ ومن (3) نجد $t=\frac{1}{2}$ ومن (2) نجد $t=1$

إذن لا توجد قيمة لـ t تحقق الجملة (I) وعليه فالنقطة A لا تنتمي إلى (d)

2) لدينا $\overrightarrow{BC}(2,-6,-2)$ وشعاع توجيه (d) هو $\vec{u}(-2,6,2)$.

الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا وعليه فالمستقيمان (BC) و (d) متوازيان.

3) المستقيم (BC) يشمل B وشعاع توجيهه $\vec{u}$ وعليه التمثيل الوسيطي لـ (BC) هو :

$$\begin{cases} x=2-2t \\ y=6+6t \\ z=2t \end{cases} \quad \text{مع } t \in \mathbb{R}$$

3-2 التمثيل الوسيطي لمستو

A ، B ، C ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

المستوي (ABC) هو مجموعة النقط M بحيث $\overrightarrow{AM}=t\,\overrightarrow{AB}+s\,\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(\alpha,\beta,\gamma)$ و $\overrightarrow{AC}(\alpha',\beta',\gamma')$ هما شعاعي توجيه المستوي (ABC)

مبرهنة

المستوي (ABC) المار من النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ وشعاعي توجيهه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق (S) ..... $\begin{cases} x=x_0+t\alpha+s\alpha' \\ y=y_0+t\beta+s\beta' \\ z=z_0+t\gamma+s\gamma' \end{cases}$ مع $(t,s)\in\mathbb{R}^2$

تسمى الجملة (S) بالتمثيل الوسيطي للمستوي (ABC)

تمرين تدريبي 1

لتكن $A(1,2,-1)$ ، $B(0,1,2)$ ، $C(1,3,0)$ نقط من الفضاء

1) بين أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

2) عين التمثيل الوسيطي للمستوي (ABC) .

3) هل النقطة $D(2,3,1)$ تنتمي إلى المستوي (ABC) ؟

✓ الحل

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(-1,-1,3)$ ، $\overrightarrow{AC}(0,1,1)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا ومنه النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

2) التمثيل الوسيطي للمستوي (ABC) المار من A وشعاعي توجيهه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هي الجملة

$$(S) \ldots\ldots \begin{cases} x=1-t \\ y=2-t+s \\ z=-1+3t+s \end{cases} \quad , (t,s)\in\mathbb{R}^2$$

3) النقطة D تنتمي إلى (ABC) إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان وحيدان s و t يحققان الجملة (S)

D تنتمي إلى (ABC) يعني أن $\begin{cases} x_D=1-t \\ y_D=2-t+s \\ z_D=-1+3t+s \end{cases}$

بتعويض إحداثيات D نجد $\begin{cases} 2=1-t & \ldots(1) \\ 3=2-t+s & \ldots(2) \\ 1=-1+3t+s & \ldots(3) \end{cases}$

من (1) نجد $t=-1$ نعوض t في (2) و (3) نجد $\begin{cases} s=0 \\ s=5 \end{cases}$

s ليس وحيدا وبالتالي النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC) .

تمرين تدريبي 2

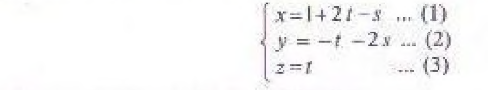
1) (P_1) مستوي تمثيله الوسيطي هو (S) $\begin{cases} x=1+2t-s \\ y=-t-2s \\ z=t \end{cases}$ مع $(t,s)\in\mathbb{R}^2$

أوجد المعادلة الديكارتية للمستوي (P_1) .

2) ليكن (P_2) مستوي معادلته الديكارتية $2x+y-z+1=0$ أوجد التمثيل الوسيطي للمستوي (P_2) .

✓ الحل

1) إيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (P_1) يعني إيجاد علاقة بين x ، y و z مستقلة عن الوسيطين t و s



$$\begin{cases} x=1+2t-s & \dots (1) \\ y=-t-2s & \dots (2) \\ z=t & \dots (3) \end{cases}$$

نعوض t بما يساويها في (2) نجد $y=-z-2s$ ومنه نجد $s=-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z$

نعوض t و s في المعادلة (1) نجد $x=1+2z+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z$

بالتبسيط نجد $-2x+y+5z+2=0$

إذن المعادلة الديكارتية للمستوي (P_1) هي $-2x+y+5z+2=0$

2) لتكن $A(0,1,1)$ نقطة من المستوي (P_2)

$$\overrightarrow{AM}=x\vec{i}+y\vec{j}+(z-1)\vec{k}=x\vec{i}+y\vec{j}+(2x+y)\vec{k}$$

$$=x\vec{i}+y\vec{j}+2x\vec{k}+y\vec{k}=x(\vec{i}+2\vec{k})+y(\vec{j}+\vec{k})$$

$$=x\vec{u}+y\vec{v}$$

حيث $\vec{u}(1,0,2)$ و $\vec{v}(0,1,1)$.

$\vec{u}(1,0,2)$ و $\vec{v}(0,1,1)$ شعاعان مستقلان خطيا وبالتالي يمثلان شعاعي توجيهه (P_2)

وعليه التمثيل الوسيطي لـ (P_2) المار من A وشعاعي توجيهه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو:

$$(S')\begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=2t+s+1 \end{cases} \quad \text{مع} \quad (t,s)\in \mathbb{R}^2$$

4. تقاطع مستويين

• ترجمة هندسية

ليكن (P_1) و (P_2) مستويين مختلفين.

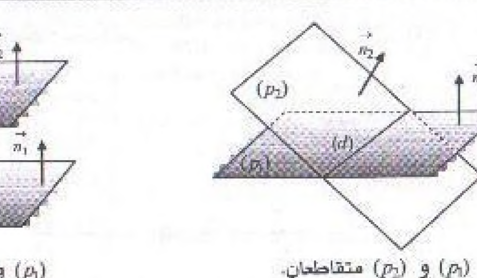
نعلم أن هذين المستويين إما أن يكونا متوازيين تماما أو متقاطعين.

إذا كان $\vec{n_1}$ ناظم (P_1) و $\vec{n_2}$ ناظم (P_2) فإن المستويين (P_1) و (P_2) متوازيان إذا وفقط إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مرتبطين خطيا.

خاصية

ليكن (P_1) و (P_2) مستويين مختلفين وناظماهما على التوالي $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$

- إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مرتبطين خطيا فإن المستويين (P_1) و (P_2) متوازيان، وبالتالي ليس لهما نقاط مشتركة.
- إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مستقلين خطيا فإن (P_1) و (P_2) متقاطعان في مستقيم (d)



(p_1) و (p_2) متقاطعان.

(p_1) و (p_2) متوازيان.

• ترجمة جبرية

(P_1) و (P_2) مستويان معادلتاهما على التوالي $ax+by+cz+d=0$ و $a'x+b'y+c'z+d'=0$

مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ و $(a',b',c')\neq(0,0,0)$ وناظماهما $\vec{n_1}(a,b,c)$ ، $\vec{n_2}(a',b',c')$.

$\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مرتبطان خطيا إذا وفقط إذا كانت الأعداد a,b,c متناسبة مع الأعداد a',b',c'.

a,b,c متناسبة مع a',b',c' يعني أن $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

خاصية

المستويان (P_1) و (P_2) ذوا المعادلتين $ax+by+cz+d=0$ و $a'x+b'y+c'z+d'=0$ على التوالي متقاطعان إذا وفقط إذا كانت الثلاثية (a,b,c) غير متناسبة مع الثلاثية (a',b',c').

- إذا كان $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مستقلين خطيا فإن كل نقطة M من المستقيم (d) الناتج من تقاطع (P_1) و (P_2) لها إحداثيات (x,y,z) تحقق الجملة $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$

وللحصول على التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) ناخذ كوسيط t أحد المتغيرات x ، y أو z ثم نحل جملة ذات معادلتين بالمجهولين الباقيين واللذان نعبر عنهما بدلالة t.

تمرين تدريبي

(P_1) و (P_2) مستويان معادلتاهما على التوالي $2x+y+z-1=0$ و $x+3y+2z-3=0$.
بين أن هذين المستويين متقاطعان في مستقيم (d)، ثم عين تمثيلا وسيطيا له.

✓ الحل

ناظم (P_1) هو $\vec{n_1}(2,1,1)$ وناظم (P_2) هو $\vec{n_2}(1,3,2)$

بما أن $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{3}\neq\frac{1}{2}$ فإن $\vec{n_1}$ و $\vec{n_2}$ مستقلان خطيا.

وبالتالي (P_1) و (P_2) متقاطعان في مستقيم (d).

إذا كانت $M(x,y,z)$ من (d) فإن (x,y,z) تحقق الجملة $\begin{cases} 2x+y+z-1=0 \\ x+3y+2z-3=0 \end{cases}$ ..... (I)

بوضع $z=t$ فإن الجملة (I) تصبح كما يلي $\begin{cases}2x+y+t-1=0\\ x+3y+2t-3=0\end{cases}$ .... (II)

بعد حل الجملة (II) نجد $\begin{cases}x=-\frac{1}{5}t\\ y=-\frac{3}{5}t+1\\ z=t\end{cases}$

5. جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم

رأينا سابقا أنه إذا كان ناظما (P_1) و (P_2) مستقلين خطيا فإن تقاطع (P_1) و (P_2) هو مستقيم (d) أي أنه إذا كانت الأعداد الحقيقية a, b, c غير متناسبة مع a', b', c'

فإن جملة المعادلتين $\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$ تعبر عن انتماء النقطة $M(x, y, z)$ إلى المستقيم (d) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2).

عكسيا يمكن اعتبار كل مستقيم من الفضاء كتقاطع لمستويين ومنه فإن كل مستقيم نعبر عنه بجملة معادلتين ديكارتيتين من الشكل $\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$

حيث a, b, c غير متناسبة مع a', b', c'

خاصية

مجموعة النقط من الفضاء التي إحداثياتها (x, y, z) تحقق الجملة:

$\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}$ و a, b, c غير متناسبة مع a', b', c' هي مستقيم.

تمرين تدريبي 1

1) $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

أ) بين أن جملة المعادلتين $\begin{cases}x+y-z-2=0\\ 2x+y+2z=0\end{cases}$ تمثل جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم (d).

ب) عين تمثيلا وسيطيا لـ (d).

✓ الحل

أ) لكي تمثل $\begin{cases}x+y-z-2=0\\ 2x+y+2z=0\end{cases}$ جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (d)

يجب أن تكون الأعداد $-1, 1, 1$ غير متناسبة مع الأعداد $2, 1, 2$

وبالفعل فإن الثلاثية $(1, 1, -1)$ غير متناسبة مع الثلاثية $(2, 1, 2)$.

إذن الجملة $\begin{cases}x+y-z-2=0\\ 2x+y+2z=0\end{cases}$ هي جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (d)

ب) إذا كانت $M(x, y, z)$ نقطة من (d) فإن (x, y, z) تحقق الجملة:

$\begin{cases}x+y-z-2=0\\ 2x+y+2z=0\end{cases}$ ... (S)

بوضع $z=t$ فإن الجملة (S) تصبح كما يلي $\begin{cases}x+y-z-2=0\\ 2x+y+2z=0\end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد $x=-3t-2$ و $y=4t+4$

إذن الجملة $\begin{cases}x=-3t-2\\ y=4t+4\\ z=t\end{cases}$ تمثيلا وسيطيا لـ (d).

تمرين تدريبي 2

$(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ معلم للفضاء. لتكن الجملة $\begin{cases}x=2t+3\\ y=t-2\\ z=-t+3\end{cases}$ تمثيلا وسيطيا لمستقيم (d).

عبر عن (d) بجملة معادلتين ديكارتيتين.

✓ الحل

$\begin{cases}x=2t+3 \text{ .... }(1)\\ y=t-2 \text{ ....}(2)\\ z=-t+3 \text{ ....}(3)\end{cases}$

من (3) نجد $t=-z+3$ نعوض عبارة t في (1) و (2)

نجد $\begin{cases}x=2(-z+3)+3\\ y=(-z+3)-2\end{cases}$ بالتبسيط نجد $\begin{cases}x+2y-9=0\\ y+z-1=0\end{cases}$ .... (I)

إذن الجملة (I) هي جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (d).

6. تقاطع مستقيم ومستوي

• ترجمة هندسية

ليكن مستقيم (d) و مستوي (p)

نعلم أن المستقيم (d) إما أن يكون محتوى في (p) أو أن يكون موازيا تماما له أو متقاطع معه.

ليكن $\vec{u}$ شعاع توجيهه (d) و $\vec{n}$ ناظم للمستوي (p)

(d) و (p) متوازيان إذا وفقط إذا كان $\vec{n}$ عموديا على $\vec{u}$

(d) و (p) متوازيان — (d) محتوى في (p) — (p) و (d) متقاطعان

خاصية

ليكن (d) مستقيم مار بالنقطة A وشعاع توجيهه $\vec{u}$ ، و (p) مستوي شعاع ناظمه $\vec{n}$

- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ غير متعامدين فإن (d) يقطع المستوي (p)
- إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{n}$ متعامدين فإن (d) محتوى في (p) لما A تنتمي إلى (p)

ولا توجد نقاط مشتركة بينهما إذا كانت A لا تنتمي إلى (p) .

• **ترجمة جبرية**

نفرض أن معادلة (p) هي $ax+bx+cz+d=0$ مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

والمستقيم (d) يمر بالنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$

مع $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$

التمثيل الوسيطي لـ (d) هو $\begin{cases} x=x_0+t\alpha \\ y=y_0+t\beta \\ z=z_0+t\gamma \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

المستقيم (d) يقطع المستوي (p) إذا وفقط إذا كان $\vec{n}\cdot\vec{u}\neq0$ أي $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq0$

خاصية

المستوي ذو المعادلة $ax+by+cz+d=0$ والمستقيم ذو التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=x_0+t\alpha \\ y=y_0+t\beta \\ z=z_0+t\gamma \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

متقاطعان إذا وفقط إذا كان $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq0$

- إذا كان (d) و (p) متقاطعين فإن تعيين نقطة تقاطعهما يؤول إلى حل جملة مكونة من معادلة (p) ومعادلات (d)

أي حل الجملة $\begin{cases} x=x_0+t\alpha \;\ldots\ldots\; (1) \\ y=y_0+t\beta \;\ldots\; (2) \\ z=z_0+t\gamma \;\ldots\; (3) \\ ax+by+cz+d=0 \;\ldots\; (4) \end{cases}$ ذات المجاهيل x ، y و z

ولحل هذه الجملة نعوض x ، y ، z بما يساويها في المعادلة (4) مما يسمح لنا بتعيين قيمة t أولا ثم نعوض قيمة t في عبارة كل من x و y ، z نحصل على إحداثيات نقطة التقاطع.

ملاحظة

لما يكون (d) معرف كتقاطع مستويين (P_1) و (P_2) فإن البحث عن تقاطع (d) مع (P) يؤول إلى تعيين تقاطع المستويات (P) ، (P_1) و (P_2) .

تمرين تدريبي

A و B نقطتان إحداثياتهما $(3,1,-2)$ ، $(0,2,1)$ على الترتيب.

و (p) مستوي معادلته الديكارتية $x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z-1=0$

بين أن المستقيم (AB) يقطع (p) في نقطة I معينا إحداثياتها.

✓ الحل

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3,1,3)$ و $\vec{n}_{(p)}(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

بما أن $1(-3)+(-\frac{1}{2})(1)+\frac{1}{2}(3)=-2\neq0$

فإن (AB) يقطع (p) في نقطة I إحداثياتها (x, y, z) تحقق الجملة:

$\begin{cases} x=x_A+\alpha t \\ y=y_A+\beta t \\ z=z_A+\gamma t \\ x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z-1=0 \end{cases}$ بتعويض إحداثيات A في الجملة الأخيرة نجد:

$$\begin{cases} x=3-3t \;\ldots\; (1) \\ y=1+t \;\ldots\ldots\; (2) \\ z=-2+3t \;\ldots\; (3) \\ x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z-1=0 \;\ldots\; (4) \end{cases}$$

بتعويض x ، y ، z في المعادلة (4) نجد $t=\frac{1}{4}$

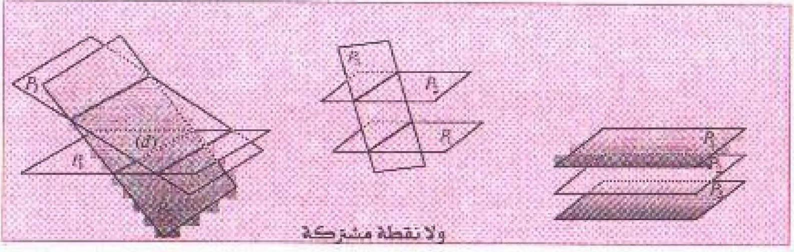
إذن $x=3-3(\frac{1}{4})=\frac{9}{4}$ و $y=1+t=\frac{5}{4}$ و $z=-2+3t=-\frac{5}{4}$

وبالتالي $I=(\frac{9}{4},\frac{5}{4},-\frac{5}{4})$

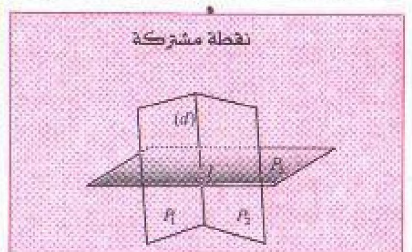
7. تقاطع ثلاثة مستويات

• **ترجمة هندسية**

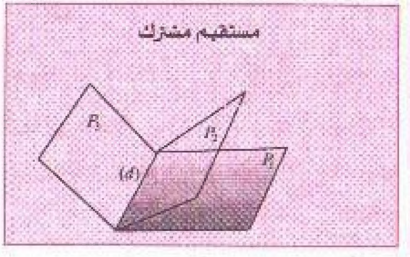
- إذا كان مستويان من بين الثلاثة منطبقين فإن دراسة تقاطع المستويات الثلاث يؤول إلى دراسة تقاطع مستويين.
- إذا كانت المستويات الثلاثة مختلفة مثنى مثنى فمن أجل تعيين تقاطعها يجب علينا أن ندرس تقاطع (P_1) و (P_2) أولا ثم تقاطع $(P_1)\cap(P_2)$ مع (P_3) وكل الحالات الممكنة ملخصة في الجدول التالي:



ولا نقطة مشتركة



نقطة مشتركة



مستقيم مشترك

• ترجمة جبرية

(P_1) ، (P_2) ، (P_3) مستويات معادلاتها على الترتيب :

$ax+by+cz+d=0$ مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

$a'x+b'y+c'z+d'=0$ مع $(a',b',c')\neq(0,0,0)$

$a''x+b''y+c''z+d''=0$ مع $(a'',b'',c'')\neq(0,0,0)$

تعيين تقاطع الثلاثة مستويات يؤول إلى حل جملة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل

$$(S)\ \ldots\ldots \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$$

الجملة (S) إما ليس لها حلول اولها حل وحيد أو لها ما لا نهاية من الحلول
والجدول التالي يلخص كل الحالات لمجموعة حلول الجملة (S) :

مجموعة حلول الجملة (S)	تقاطع (P_1) و (P_2) و (P_3)
خالية	لا توجد أي نقطة مشتركة
ثلاثية وحيدة	نقطة مشتركة وحيدة $I(x,y,z)$
كل الثلاثيات (x,y,z) حلول المعادلتين المعرفتين لـ (d)	مستقيم (d) ، ((d) معرف باثنتين من ثلاث معادلات).
كل الثلاثيات (x,y,z) حلول لواحدة من المعادلات	مستوي (حالة $P_1=P_2=P_3$)

تمرين تدريبي

المستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3) معرفة بمعادلاتها الديكارتية التالية :

$(P_1): x+y+2z+2=0$ ، $(P_2): 2x+y-z-1=0$ ، $(P_3): x-y+2=0$

ادرس تقاطع المستويات (P_1) ، (P_2) و (P_3).

✔ الحل

تقاطع (P_1) ، (P_2) و (P_3) يؤول إلى حل الجملة

$$(S)\ \ldots\ldots \begin{cases} x+y+2z+2=0 & \ldots\ (1) \\ 2x+y-z-1=0 & \ldots\ (2) \\ x-y+2=0 & \ldots\ (3) \end{cases}$$

من المعادلة (3) نجد $y=x+2$ نعوض y في (1) و (2) نجد $(S')\ \ldots\ldots \begin{cases} x+z+2=0 \\ 3x-z+1=0 \end{cases}$

الجملة (S') تكتب $\begin{cases} z=-2-x \\ z=3x+1 \end{cases}$

من المساوتين $z=-2-x$ و $z=3x+1$ نستنتج $x=-\frac{3}{4}$

لذن $z=-\frac{5}{4}$ و $y=\frac{5}{4}$ بالتالي (P_1) ، (P_2) و (P_3) متقاطعة في النقطة $I\left(-\frac{3}{4},\frac{5}{4},-\frac{5}{4}\right)$ د

تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 إثبات الإستقامية باستعمال المرجح

$ABCD$ رباعي وجوه و α عدد حقيقي ، I و J منتصفا $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي، E و F نقطتان بحيث $\overrightarrow{AE} = \alpha\,\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF} = \alpha\,\overrightarrow{BC}$
و H منتصف $[EF]$.

1) تحقق أن E مرجح الجملة $\{(A, 1-\alpha), (D, \alpha)\}$ وأن F مرجح الجملة $\{(B, 1-\alpha), (C, \alpha)\}$

2-أ) بين أن H مرجح الجملة $\{(D, \alpha), (C, \alpha), (A, 1-\alpha), (B, 1-\alpha)\}$

ب) استنتج أن I ، J و H على استقامة واحدة.

✓ الحل

1) ـ المساواة $\overrightarrow{AE} = \alpha\,\overrightarrow{AD}$ تصبح $\overrightarrow{AE} = \alpha(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED})$ أي $(1-\alpha)\,\overrightarrow{AE} - \alpha\,\overrightarrow{ED} = \vec{0}$

وبضرب هذه الأخيرة في (-1) نجد $(1-\alpha)\,\overrightarrow{AE} + \alpha\,\overrightarrow{ED} = \vec{0}$

وهذا يعني أن E مرجح الجملة $\{(A, 1-\alpha), (D, \alpha)\}$

ـ المساواة $\overrightarrow{BF} = \alpha\,\overrightarrow{BC}$ تكتب على الشكل $\overrightarrow{BF} = \alpha(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC})$

أي $(1-\alpha)\,\overrightarrow{BF} - \alpha\,\overrightarrow{FC} = \vec{0}$

وبضرب هذه الأخيرة في (-1) نجد $(1-\alpha)\,\overrightarrow{BF} + \alpha\,\overrightarrow{FC} = \vec{0}$

وهذا يعني أن F مرجح الجملة $\{(B, 1-\alpha), (C, \alpha)\}$

2) $(1-\alpha)\,\overrightarrow{HA} + (1-\alpha)\,\overrightarrow{HB} + \alpha\,\overrightarrow{HC} + \alpha\,\overrightarrow{HD} = [(1-\alpha)\,\overrightarrow{HA} + \alpha\,\overrightarrow{HD}] + [(1-\alpha)\,\overrightarrow{HB} + \alpha\,\overrightarrow{HC}]$

$= \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HF} = \vec{0}$

إذن H هي مرجح الجملة $\{(A, 1-\alpha), (B, 1-\alpha), (C, \alpha), (D, \alpha)\}$

ب) I هي مرجح الجملة $\{(A, 1-\alpha), (B, 1-\alpha)\}$ و J مرجح $\{(C, \alpha), (D, \alpha)\}$

حسب خاصية التجميع فإن H هي مرجح $\{(I, 2-2\alpha), (J, 2\alpha)\}$

إذن النقط H ، J ، I على استقامة واحدة.

تطبيق 2 تعيين مجموعة النقط

A و B نقطتان مختلفتان من الفضاء.

1) عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\left\|\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB}\right\| = AB$

2) عين مجموعة النقط من الفضاء بحيث $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB}\right\| = \frac{3}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\|$

✓ الحل

1) لتكن G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, -2)\}$ تحقق $\overrightarrow{GA} - 2\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} - 2\,\overrightarrow{MG} - 2\,\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{MG}$

المساواة $\left\|\overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB}\right\| = AB$ تكافئ $MG = AB$

ومنه مجموعة النقط المطلوبة هي سطح كرة مركزها G وطول نصف قطرها $r = AB$

2) لتكن I منتصف $[AB]$ و G_1 مرجح الجملة $\{(A, 1), (B, 2)\}$

$\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} = 3\,\overrightarrow{MG_1}$ و $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$

المساواة $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB}\right\| = \frac{3}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\|$ تكافئ $3\,MG_1 = \frac{3}{2} \times 2\,MI$

أي $MG_1 = MI$

إذن مجموعة النقط M هي المستوي المحوري للقطعة $[G_1 I]$

تطبيق 3 إثبات أن أربع نقط من نفس المستوي

$ABCD$ رباعي وجوه، K نقطة من القطعة $[AB]$ بحيث $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{AB}$

و L نقطة من القطعة $[CD]$ بحيث $\overrightarrow{CL} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{CD}$.

I و J منتصفا $[AD]$ و $[BC]$ على الترتيب،

G مرجح الجملة $\{(A, 3), (B, 1), (C, 1), (D, 3)\}$

أ) بين أن النقط G ، K ، L على استقامة واحدة.

ب) بين أن النقط G ، I ، J على استقامة واحدة.

جـ) استنتج أن النقط I ، J ، K ، L من نفس المستوي.

✓ الحل

أ) المساواة $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ تكتب $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB})$ بالتبسيط نجد $3\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$

وهذا يعني أن K مرجح الجملة $\{(A,3),(B,1)\}$

المساواة $\overrightarrow{CL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$ تكتب $\overrightarrow{CL}=\frac{3}{4}(\overrightarrow{CL}+\overrightarrow{LD})$ بالتبسيط نجد $\overrightarrow{LC}+3\overrightarrow{LD}=\vec{0}$

وهذا يعني أن L مرجح الجملة $\{(C,1),(D,3)\}$

إذن G هي مرجح الجملة $\{(K,4),(L,4)\}$ أي G منتصف $[KL]$

وعليه النقط G ، L ، K على استقامة واحدة.

ب) I مرجح الجملة $\{(A,3),(D,3)\}$ و J مرجح الجملة $\{(B,1),(C,1)\}$

وحسب خاصية التجميع فإن G هي مرجح الجملة $\{(J,2),(I,6)\}$

وهذا يعني أن النقط I ، J ، G تقع على استقامة واحدة.

جـ) بما أن G ، I ، J على استقامة واحدة فإن G تنتمي إلى المستقيم (IJ)

بما أن G ، K ، L على استقامة واحدة فإن G تنتمي إلى المستقيم (KL)

إذن G تنتمي إلى تقاطع (IJ) و (KL) الغير متوازيين

وعليه فإن G تنتمي إلى المستوي المحدد بالمستقيمين (IJ) و (KL)

وبالتالي النقط I ، J ، K ، L من نفس المستوي.

تطبيق 4 حساب المسافة بين نقطة ومستوي

$ABCDEFGH$ مكعب حرفه 1 .

1) أ) بسط عبارة الشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ ثم استنتج أن $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

ب) أثبت أن $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=0$

جـ) بين أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BDE) .

2) I مركز ثقل المثلث BDE استنتج من السؤال 1-أ) أن النقطة I هي نقطة تقاطع المستقيم (AG) والمستوي (BDE) ثم عين موضعها على القطعة $[AG]$.

3) نزود الفضاء بمعلم متعامد ومتجانس

$(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

أ) اكتب معادلة للمستوي (BDE) .

ب) اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) المار من H و العمودي على المستوي (BDE)

جـ) أوجد إحداثيات J تقاطع (d) مع (BDE)

د) استنتج مسافة النقطة H عن المستوي (BDE) .

✓ الحل

1) أ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AE}$

$=\overrightarrow{AG}+\vec{0}=\overrightarrow{AG}$

• $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$

$=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

ب) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}^2$

$=-\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AE}^2+0+0+0+0=-1+1=0$

جـ) من المساواة $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ نستنتج أن (AG) عمودي على (BD)

ومن المساواة $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=0$ نستنتج أن (AG) عمودي على (BE)

وبما أن (BE) و (BD) متقاطعان فإن (AG) عمودي على المستوي الذي يشملهما أي (AG) عمودي على المستوي (BDE) .

2) من السؤال 1) لدينا $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IE}$

$\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AI}+(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE})$

$\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AI}+\vec{0}=3\overrightarrow{AI}$

إذن النقط A ، I ، G على استقامة واحدة.

وبالتالي (AI) عمودي على (BDE)

وبما أن I تنتمي إلى (BDE) فإن تقاطع (AG) مع (BDE) هي I

وموضع النقطة I يعطى بـ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$

لدينا في المعلم السابق $A(0,0,0)$ ، $B(1,0,0)$ ، $G(1,1,1)$

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (BDE)

$\overrightarrow{AG}$ شعاع ناظم للمستوي (BDE)

المستوي (BDE) هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AG}=0$ .... (1)

$\overrightarrow{AG}(1,1,1)$ ، $\overrightarrow{BM}(x-1,y,z)$

المساواة (1) تكافئ $x-1+y+z=0$

إذن معادلة المستوي (BDE) هي $x+y+z-1=0$

ب) $H(0,1,1)$

شعاع توجيه d هو $\overrightarrow{AG}(1,1,1)$

التمثيل الوسيطي للمستقيم d هو $\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

جـ) إحداثيات النقطة J هي حل للجملة $\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=1+t\\x+y+z-1=0\end{cases}$ (S)

نعوض عبارة كل من x ، y ، z في معادلة المستوي نجد :

$t+(1+t)+(1+t)-1=0$ ومنه نجد $t=\frac{-1}{3}$ ثم نعوض قيمة t في عبارة x و y و z نجد:

$x=-\frac{1}{3}$ ، $y=\frac{2}{3}$ ، $z=\frac{2}{3}$ إذن $J(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

د) بما أن d يقطع المستوي (BDE) في J والنقطة H تنتمي إلى d فإن J هي مسقط H على (BDE) وبالتالي المسافة بين H و (BDE) هي JH

$$JH=\sqrt{(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^2}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

تطبيق 5 تعيين صحة أو خطأ قضية معلومة

P ، Q ، R ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من المستوي.

I مرجح $\{(R,-3),(Q,2)\}$ و J مرجح $\{(R,-3),(P,1)\}$

و K مرجح $\{(Q,1),(P,m)\}$ مع m عدد حقيقي يختلف عن (-1)

هل المعطيات الآتية صحيحة أم خاطئة ؟

1) $\overrightarrow{PI}=2\overrightarrow{QP}-3\overrightarrow{RP}$

2) $\overrightarrow{PI}=2\overrightarrow{QJ}$

3) المستقيم (PI) يوازي المستقيم (QJ)

4) توجد قيمة وحيدة للعدد m بحيث أن المستقيم (PI) يوازي (RK)

5) من اجل $m=\frac{1}{2}$ فإن المستقيمين (PI) و (QJ) يوازيان (RK)

✓ الحل

1) I مرجح $(R,-3)$ ، $(Q,2)$ يعني $-3\overrightarrow{IR}+2\overrightarrow{IQ}=\vec{0}$

$-3(\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PR})+2(\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PQ})=\vec{0}$

$-3\overrightarrow{IP}-3\overrightarrow{PR}+2\overrightarrow{IP}+2\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$

$\overrightarrow{PI}=3\overrightarrow{PR}-2\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{QP}-3\overrightarrow{RP}$ إذن المعلومة الأولى صحيحة

2) $\overrightarrow{PI}=2(\overrightarrow{QJ}+\overrightarrow{JP})-3(\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{JP})$

$=2\overrightarrow{QJ}+2\overrightarrow{JP}-3\overrightarrow{RJ}-3\overrightarrow{JP}$

$=2\overrightarrow{QJ}+(-\overrightarrow{JP}-3\overrightarrow{RJ})$

$=2\overrightarrow{QJ}+(-\overrightarrow{JP}-3\overrightarrow{RJ})=2\overrightarrow{QJ}-(\overrightarrow{JP}-3\overrightarrow{JR})=2\overrightarrow{QJ}$

ومنه المعلومة (2) صحيحة

3) بما أن $\overrightarrow{PI}$ و $\overrightarrow{QJ}$ مرتبطان خطيا فإن (PI) يوازي (QJ)

4) K مرجح (P,m) و $(Q,1)$ يعني $\overrightarrow{KQ}+m\overrightarrow{KP}=\vec{0}$

$\overrightarrow{PI}=2\overrightarrow{QP}-3\overrightarrow{RP}$

$\overrightarrow{PI}=2\overrightarrow{QK}+2\overrightarrow{KP}-3\overrightarrow{RK}-3\overrightarrow{KP}$

$\overrightarrow{PI}=-3\overrightarrow{RK}+(-\overrightarrow{KP}+2\overrightarrow{QK})$

حتى يكون (PI) يوازي (RK) يجب ان يكون :

$-\overrightarrow{KP}+2\overrightarrow{QK}=\vec{0}$ اي $-\overrightarrow{KP}-2\overrightarrow{KQ}=\vec{0}$

بالقسمة على -2 نجد $\overrightarrow{KQ}+\frac{1}{2}\overrightarrow{KP}=\vec{0}$

ومنه توجد قيمة وحيدة للعدد m تجعل (PI) و (RK) متوازيان هي $\frac{1}{2}$

5) من أجل $m=\frac{1}{2}$ يكون (PI) يوازي (RK) وبما ان (PI) يوازي (QJ) فان (PI) و (QJ) يوازيان (RK) .

تطبيق 6 تعيين التمثيل الوسيطي لمستقيم

$ABCD$ رباعي وجوه ، t عدد حقيقي يختلف عن -4

و m مرجح الجملة $\{(D,1),(C,1),(B,2),(A,t)\}$

I و J منتصفا $[CD]$ و $[BI]$ على التوالي.

1) نعتبر المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$

أ) عين إحداثيتي النقطتين m و J

ب) اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AJ)

جـ) بين أن النقط A ، M ، J على استقامة واحدة ثم حدد معامل التناسب λ بين الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AJ}$.

2) عبر عن J كمرجح للنقط B, C, D ثم أوجد هذه النتيجة باستعمال خاصية التجميع .

✓ الحل

1) أ) $t\,\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

$$t\,\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA}\,(t+2+2)+2\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$

$$(t+4)\,\overrightarrow{AM}=2\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{t+4}\,\overrightarrow{AB}+\frac{1}{t+4}\,\overrightarrow{AC}+\frac{1}{t+4}\,\overrightarrow{AD}$$

ومنه إحداثيات M هي $\left(\frac{2}{t+4}\,;\,\frac{1}{t+4}\,;\,\frac{1}{t+4}\right)$

• I منتصف $[CD]$ يعني $\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$ ومنه $2\,\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

ومنه ينتج $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

إذن $I\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

بما أن J منتصف $[BI]$ فإن $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JI}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AI}=\vec{0}$$

$$2\,\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ إذن $J\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

ب) $\overrightarrow{AJ}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ هو شعاع توجيه المستقيم (AJ) .

التمثيل الوسيطي للمستقيم (AJ) هو $\begin{cases} x=\frac{1}{2}s \\ y=\frac{1}{4}s \\ z=\frac{1}{4}s \end{cases}$ .... (S) مع $s\in\mathbb{R}$

جـ) لكي نثبت أن A ، M ، J على استقامة واحدة يجب أن نثبت أن M تنتمي إلى (AJ) .
M تنتمي إلى (AJ) هذا يعني وجود عدد حقيقي s وحيد حيث أن إحداثيات M تحقق الجملة (S) .

أي $\begin{cases} \frac{2}{t+4}=\frac{1}{2}s \text{ ....(1)} \\ \frac{1}{t+4}=\frac{1}{4}s \text{ ....(2)} \\ \frac{1}{t+4}=\frac{1}{4}s \text{ ....(3)} \end{cases}$ ومنه ينتج $\begin{cases} s=\frac{4}{t+4} \\ s=\frac{4}{t+4} \\ s=\frac{4}{t+4} \end{cases}$

إذن $s=\frac{4}{t+4}$ تحقق المعادلات (1) و (2) و (3) في آن واحد.

إذن النقطة M تنتمي إلى (AJ) وهذا يعني أن A ، M ، J تقع على استقامة واحدة.

• إيجاد العلاقة بين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AJ}$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{t+4}\,\overrightarrow{AB}+\frac{1}{t+4}\,\overrightarrow{AC}+\frac{1}{t+4}\,\overrightarrow{AD}=\frac{4}{t+4}\left(\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\,\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\,\overrightarrow{AD}\right)=\frac{4}{t+4}\,\overrightarrow{AJ}$$

إذن $\lambda=\frac{4}{t+4}$

2) J منتصف $[BI]$ يعني $\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JI}=\vec{0}$

$$t\,\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

$$t\,\overrightarrow{MA}+2\,\overrightarrow{MJ}+2\,\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$$

$$t\,\overrightarrow{MA}+4\,\overrightarrow{MJ}+(2\,\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD})=\vec{0}$$

$$t\,\overrightarrow{MA}+4\,\overrightarrow{MA}+4\,\overrightarrow{AJ}+(2\,\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD})=\vec{0}$$

$$-(t+4)\,\overrightarrow{AM}+4\,\overrightarrow{AJ}+(2\,\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD})=\vec{0}$$

$$-(t+4)\,\overrightarrow{AM}+(t+4)\,\overrightarrow{AM}+(2\,\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD})=\vec{0}$$

ومنه $2\,\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$

إذن J مرجح الجملة $\{(B,2),(C,1),(D,1)\}$

• بما أن I هي مرجح الجملة $\{(C,1),(D,1)\}$ و J مرجح $\{(B,2),(I,2)\}$
فإن J مرجح الجملة $\{(B,2),(C,1),(D,1)\}$ (حسب خاصية التجميع).

تطبيق 7 — إثبات الاستقامية

A ، B ، C ، D أربع نقط من الفضاء.

I و J منتصفا $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي، E نقطة بحيث $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AD}$ و F

نقطة بحيث $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ، و K منتصف $[EF]$.
بين أن النقط I ، J ، K على استقامة واحدة.

✓ الحل

المساواة $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ تكتب $3\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$ ومنه $2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$

أي $2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$ وبالتالي E مرجح النقطتين $(D,1)$ ، $(A,2)$

المساواة $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ تكتب $3\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC}$ ومنه $2\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{FC}$

أي $2\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$ وبالتالي F مرجح النقطتين $(C,1)$ ، $(B,2)$
- مرجح النقط $(D,1)$ ، $(A,2)$ ، $(C,1)$ ، $(B,2)$ هو مرجح النقطتين $(E,3)$ ، $(F,3)$ أي منتصف $[EF]$.
إذن مرجح النقط $(A,2)$ ، $(D,1)$ ، $(C,1)$ ، $(B,2)$ هو K .
مرجح النقط $(A,2)$ ، $(D,1)$ ، $(C,1)$ ، $(B,2)$ هو مرجح $(I,4)$ ، $(J,2)$
لان K ينتمي إلى (IJ) وعليه النقط I ، J ، K على استقامة واحدة.

تطبيق 8 إثبات تقاطع مستقيمين في الفضاء

$ABCDE$ هرم قاعدته $BCDE$ متوازية الأضلاع ومركزها النقطة O .
ولتكن G مركز ثقل المثلث ABC ، و G' مركز ثقل المثلث ADE .
بين أن (OA) و (GG') متقاطعان.

✓ الحل

G مرجح النقط $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$
G' مرجح النقط $(A,1)$ ، $(D,1)$ ، $(E,1)$
إذن مرجح النقط $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$ ، $(D,1)$ ، $(E,1)$ هو مرجح النقطتين $(G,3)$ ، $(G',3)$ أي هو منتصف $[GG']$ وليكن I .
إذن النقطة I تنتمي إلى المستقيم (GG') .

لدينا $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IE}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$$

$$5\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$$

$$5\overrightarrow{IO}+(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE})+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$$

$5\overrightarrow{IO}+\vec{0}+\vec{0}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$ ومنه نجد $\overrightarrow{OA}=5\overrightarrow{OI}$
هذا معناه أن النقطة I تنتمي إلى (OA) وبالتالي المستقيمين (OA) و (GG') متقاطعان.

تطبيق 9 إثبات انتماء أربع نقط إلى مستوي

نعتبر رباعي الوجوه $ABCD$ ، ولتكن النقط I ، J ، K ، L معرفة بالكيفية التالية:
I و K منتصفا $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي ،
و $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$
ولتكن G مرجح النقط $(A,3)$ ، $(B,3)$ ، $(C,1)$ ، $(D,1)$
1) عين مرجح الجملة $\{(A,3),(D,1)\}$ ومرجح الجملة $\{(C,1),(B,3)\}$
2) بتجميع النقط A ، B ، C و D بطريقتين مختلفتين، بين أن G ينتمي الى (IK) و (JL) ، ثم استنتج أن I ، J ، K ، L تقع في نفس المستوي.

✓ الحل

1) - النقطة M_1 مرجح الجملة $\{(A,3),(D,1)\}$ يعني $3\overrightarrow{M_1A}+\overrightarrow{M_1D}=\vec{0}$

$$3\overrightarrow{M_1A}+\overrightarrow{M_1D}=3\overrightarrow{M_1L}+3\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{M_1L}+\overrightarrow{LD}=4\overrightarrow{M_1L}+3\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AD}$$

$$=4\overrightarrow{M_1L}+4\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{M_1L}+4\overrightarrow{LA}+4\overrightarrow{AL}=4\overrightarrow{M_1L}$$

لكن $3\overrightarrow{M_1A}+\overrightarrow{M_1D}=\vec{0}$ إذن $4\overrightarrow{M_1L}=\vec{0}$ ومنه M_1 منطبقة على L .
وبالتالي مرجح الجملة $\{(D,1),(A,3)\}$ هو L .

- النقطة M_2 مرجح الجملة $\{(C,1),(B,3)\}$ يعني $\overrightarrow{M_2C}+3\overrightarrow{M_2B}=\vec{0}$

$$\overrightarrow{M_2C}+3\overrightarrow{M_2B}=\overrightarrow{M_2J}+\overrightarrow{JC}+3\overrightarrow{M_2J}+3\overrightarrow{JB}=4\overrightarrow{M_2J}+\overrightarrow{JC}+3\overrightarrow{JB}$$

$$=4\overrightarrow{M_2J}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{JB}=4\overrightarrow{M_2J}+4\overrightarrow{JB}+4\overrightarrow{BJ}=4\overrightarrow{M_2J}$$

وبما أن $\overrightarrow{M_2C}+3\overrightarrow{M_2B}=\vec{0}$ فإن $4\overrightarrow{M_2J}=\vec{0}$ وهذا يعني أن M_2 منطبقة على J .
إذن مرجح الجملة $\{(C,1),(B,3)\}$ هو J .
2) - مرجح $(D,1),(A,3)$ هو L و مرجح $(C,1),(B,3)$ هو J .
إذن مرجح $(C,1),(B,3),(D,1),(A,3)$ هو مرجح النقطتين $(J,4),(L,4)$ أي منتصف $[LJ]$
- مرجح $(B,3),(A,3)$ هو $(I,2)$ ومرجح $(D,1),(C,1)$ هو $(K,2)$
ومنه مرجح $(D,1),(C,1),(B,3),(A,3)$ هو منتصف $[IK]$.
إذن مرجح $(D,1),(C,1),(B,3),(A,3)$ ينتمي إلى (LJ) وينتمي إلى (IK) فهو إذن

ينتمي إلى تقاطع (IK) و (LJ) وعليه فإن المستقيمين (IK) و (LJ) متقاطعان في G .
وبما أن المستقيمين (IK) و (LJ) متقاطعان فإن النقط I ، J ، K ، L تنتمي إلى نفس المستوي.

تطبيق 10 تعيين مجموعة النقط

A, B, C ثلاث نقط من الفضاء ليست على استقامة واحدة، و k عدد حقيقي من $[-1,1]$
لتكن G_k مرجح الجملة $\{(A, k^2+1) ، (B, k) ، (C, -k)\}$.
1) مثل النقط A, B, C و I منتصف $[BC]$ ثم انشئ G_1 و G_{-1}
2.أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $k \in [-1,1]$ يكون $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{1+k^2}\overrightarrow{BC}$
ب) اعط جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $[-1,1]$ بـ $f(x) = \frac{-x}{1+x^2}$
جـ) استنتج مجموعة النقط G_k لما k يمسح المجال $[-1,1]$
3) حدد (γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

4) حدد (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$$

5) نزود الفضاء بمعلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ولتكن إحداثيات النقط A ، B ، C في هذا المعلم هي $(0,0,2)$ ، $(-1,2,1)$ ، $(-1,2,5)$ على التوالي.
النقطة G_k والمجموعتان (γ) و (Γ) معرفتان كما في السابق .
أ) عين إحداثيات G_1 و G_{-1} ، ثم بين أن (γ) و (Γ) متقاطعتان.
ب) عين نصف قطر الدائرة (C) الناتجة من تقاطع المجموعتين (γ) و (Γ) .

✓ الحل

1) ـ بما أن النقطة G_1 مرجح $(A, 2)$ ، $(B, 1)$ ، $(C, -1)$ فإن $2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C} = \vec{0}$

$$2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{G_1A} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$2\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ـ بما أن G_{-1} مرجح $(A, 2)$ ، $(B, -1)$ ، $(C, 1)$ فإن :

$$2\overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{G_{-1}B} + \overrightarrow{G_{-1}C} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{G_{-1}A} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{G_{-1}A} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{G_{-1}A} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AG_{-1}} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

ومنه $\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

2) أ) G_k مرجح النقط (A, k^2+1) ، (B, k) ، $(C, -k)$

يعني $(k^2+1)\overrightarrow{G_kA} + k\overrightarrow{G_kB} - k\overrightarrow{G_kC} = \vec{0}$

$$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA} + k\overrightarrow{G_kA} + k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{G_kA} - k\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$(k^2+1)\overrightarrow{G_kA} = -(k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}) = -k(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$

ومنه نجد $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

ب) $f'(x) = \frac{-1-x^2+2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}$

من أجل كل x من $]-1,1[$ يكون $f'(x) \langle 0$
ومنه f متناقصة تماما على $[-1,1]$

x	-1		1
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$

جـ) لما k يمسح $[-1,1]$ فإن $f(k)$ يمسح المجال $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

إذن $\overrightarrow{AG_k} = \lambda\overrightarrow{BC}$ مع λ يمسح المجال $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
وعليه مجموعة النقط G_k لما k يمسح $[-1,1]$ هي القطعة $[G_{-1}G_1]$
3) من أجل كل نقطة M من الفضاء يكون:

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_1} \quad \text{و} \quad 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_{-1}}$$

المساواة $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{MG_{-1}}\right\|$

أي $MG_1 = MG_{-1}$ ومنه مجموعة النقط (γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$
4) من أجل كل نقطة M من الفضاء لدينا :

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC}$$

$$= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -2\overrightarrow{AI}$$

المساواة $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|2\overrightarrow{AI}\right\|$ أي

$$MG_1 = AI$$

إذن مجموعة النقط Γ هي سطح كرة مركزها G_1 و طول نصف قطرها AI
5) أ) لتكن (x_0, y_0, z_0) إحداثيات G_1 و (x_1, y_1, z_1) إحداثيات G_{-1}

$x_0=\frac{2x_A+x_B-x_C}{2}=\frac{0-1+1}{2}=0$

$y_0=\frac{2y_A+y_B-y_C}{2}=\frac{0+2-2}{2}=0$

$z_0=\frac{2z_A+z_B-z_C}{2}=\frac{4+1-5}{2}=0$ إذن $G_1(0,0,0)$

بنفس الطريقة نجد $G_{-1}(0,0,4)$

- المستوي المحوري للقطعة $[G_{-1}G_1]$ ناظمه هو الشعاع $\overrightarrow{G_{-1}G_1}$ ويمر بالنقطة A منتصف $[G_{-1}G_1]$

إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة من هذا المستوي فإنها تحقق :

$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{G_{-1}G_1}=0$ حيث E منتصف $[G_{-1}G_1]$

$\overrightarrow{EM}(x,y,z-2)$ ، $E(0,0,2)$ ، $\overrightarrow{G_{-1}G_1}(0,0,-4)$

المساواة $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{G_{-1}G_1}=0$ تكافئ $-4(z-2)=0$ أي $-4z+8=0$

المسافة بين G_1 والمستوي المحوري لـ $[G_{-1}G_1]$ هي $\frac{|4\times0-8|}{\sqrt{42}}=\frac{8}{4}=2$

ونصف قطر سطح الكرة يساوي $AI=\sqrt{(-1)^2+(2-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6}$

بما أن المسافة بين G_1 المستوي المحوري لـ $[G_{-1}G_1]$ أصغر من نصف قطر سطح الكرة فإن هذا المستوي يقطعها في دائرة .

ب) معادلة سطح الكرة هي $x^2+y^2+z^2=6$

الدائرة الناتجة من التقاطع تحقق $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ z=2\end{cases}$

وبالتالي معادلتها هي $x^2+y^2=2$

إذن نصف قطر هذه الدائرة هو $r=\sqrt{2}$

طريقة ثانية لحساب نصف القطر :

حسب نظرية فيتاغورث لدينا $r^2+4=6$ ومنه $r^2=2$

إذن $r=\sqrt{2}$

تطبيق 11 إثبات تقاطع مستقيمين في الفضاء

لتكن النقط A ، B ، C ، D ليست من نفس المستوي α ، β عددان حقيقيان .
لتكن I مرجح (A,α) ، $(B,1-\alpha)$ ، و J مرجح (C,α) و $(D,1-\alpha)$
و K مرجح (A,β) ، $(C,1-\beta)$ و L مرجح (B,β) و $(D,1-\beta)$
بين أن المستقيمين (IJ) و (KL) متقاطعان .

✓ الحل

- بما أن I مرجح (A,α) ، $(B,1-\alpha)$ فهي إذن مرجح $(A,\alpha\beta)$ ، $(B,(1-\alpha)\beta)$
- بما أن J مرجح (C,α) و $(D,1-\alpha)$ فهي إذن مرجح $(C,\alpha(1-\beta))$ ، $(D,(1-\alpha)(1-\beta))$

إذن M مرجح $(A,\alpha\beta)$ ، $(B,(1-\alpha)\beta)$ ، $(C,\alpha(1-\beta))$ ، $(D,(1-\alpha)(1-\beta))$
هو مرجح النقطتين I و J .

- بما أن K مرجح (A,β) ، $(C,(1-\beta)$ فهو إذن مرجح $(A,\alpha\beta)$ ، $(C,\alpha(1-\beta))$
- بما أن L مرجح (B,β) ، $(D,(1-\beta)$ فهو مرجح $(B,(1-\alpha)\beta)$ ، $(D,(1-\alpha)(1-\beta))$

إذن M مرجح $(A,\alpha\beta)$ ، $(B,(1-\alpha)\beta)$ ، $(C,\alpha(1-\beta))$ ، $(D,(1-\alpha)(1-\beta))$.
هو أيضا مرجح النقطتين K و L

ومنه ينتج أن M تنتمي الى المستقيمين (JI) و (KL)

إذن المستقيمان (JI) و (KL) متقاطعان في النقطة M .

تطبيق 12 الوضع النسبي لمستقيم ومستوي في الفضاء

ليكن المستقيمان d_1 ، d_2 من مستوي (P) متقاطعين في نقطة O .
وليكن d مستقيما من الفضاء يقطع (P) في نقطة وحيدة A بحيث :
$A\notin d_1$ و $A\notin d_2$ ولتكن M نقطة أخرى من d مختلفة عن A
1) ليكن (P_1) المستوي المار من M ويشمل d_1 و (P_2) المستوي المار من M ويشمل d_2 . عين تقاطع (P_1) و (P_2) و لتكن (Γ) هذه المجموعة ؟
2) بين أنه لما M تسمح d فإن (Γ) محتواة في مستوي ثابت يطلب تعينه .

✓ الحل

1) لدينا $(P)\cap(P_1)=d_1$ و $(P)\cap(P_2)=d_2$ ...... (1)

لدينا $d\cap(P_1)=M$ و $d\cap(P_2)=M$ .... (2)

من (1) تستنتج أن :

$(P_1)\cap(P_2)\cap(P)=[(P_1)\cap(P)]\cap[(P_2)\cap(P)]=d_1\cap d_2=\{O\}$ .... (I)

$(P_1)\cap(P_2)\cap d=[(P_1)\cap d]\cap[(P_2)\cap d]=\{M\}$ .... (II)

من (I) نستنتج أن O تنتمي إلى $(P_1)\cap(P_2)$ ومن (II) نستنتج أن M تنتمي إلى $(P_1)\cap(P_2)$

إذن (OM) محتوى في $(P_1)\cap(P_2)$

نعلم أن $(P_1)\cap(P_2)$ إما أن يكون خاليا أو مستقيما أو (P_1)

- بما أن O تنتمي إلى $(P_1)\cap(P_2)$ فإن هذا التقاطع غير خال .
- بما أن (P_1) لا يشمل d_2 فإن (P_1) و (P_2) غير منطبقين

وبالتالي $(P_1)\cap(P_2)=(OM)=(\Gamma)$

2) لما M تسمح d فإن المستقيم (OM) يقطع d ويقطع (OA) دائما .

وبالتالي المجموعة Γ محتواة في المستوي الذي يشمل المستقيمين المتقاطعين d و (OA) .

تطبيق 13 الوضع النسبي لمستقيم ومستوي في الفضاء

ليكن d مستقيما مارا بالنقطة $A(1,2,-4)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(1,2,3)$

1) اعط تمثيلا وسيطيا لـ d ؟

2) هل النقط $B(2,4,-1)$ ، $C(3,6,-2)$ ، $D(-2,-4,-13)$ تنتمي إلى d ؟

3) هل توجد نقطة من d فاصلتها 4 ؟ نقطة ترتيبها 10 ؟ نقطة ارتفاعها 3 ؟

4) اوجد تقاطع d مع المستويات (XOY) ، (XOZ) و (YOZ) ؟

5) حدد تقاطع d مع المحاور الثلاثة للمعلم التعامد والتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

الحل

1) التمثيل الوسيطي للمستقيم d هو $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

2) B تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} 2=1+t \\ 4=2+2t \\ -1=-4+3t \end{cases}$ بعد حل هذه الجملة نجد $t=1$

بما انه توجد قيمة وحيدة لـ t فإن النقطة B تنتمي الى d

C تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} 3=1+t \\ 6=2+2t \\ -2=-4+3t \end{cases}$ بعد حل هذه الجملة نجد $\begin{cases} t=2 \\ t=\frac{2}{3} \end{cases}$

قيمة t ليست وحيدة ومنه C لا تنتمي إلى d

D تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} -2=1+t \\ -4=2+2t \\ -13=-4+3t \end{cases}$ بعد حل هذه الجملة نجد $t=-3$

ومنه توجد قيمة وحيدة لـ t .

إذن النقطة D تنتمي إلى المستقيم d .

3) لتكن M_1 نقطة فاصلتها 4 .

M_1 تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} 4=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t=3 \\ y=8 \\ z=5 \end{cases}$

إذن $M_1(4,8,5)$

- لتكن M_2 نقطة ترتيبتها 4 .

M_2 تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} x=1+t \\ 10=2+2t \\ z=-4+3t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} x=5 \\ t=4 \\ z=8 \end{cases}$

إذن $M_2(5,10,8)$

- لتكن M_3 نقطة ارتفاعها 3 .

M_3 تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ 3=-4+3t \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} t=\frac{7}{3} \\ x=\frac{10}{3} \\ y=\frac{20}{3} \end{cases}$

إذن $M_3(\frac{10}{3},3,\frac{20}{3})$

4) تقاطع (d) مع (XOY) هو حل للجملة $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \\ z=0 \end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد $\begin{cases} z=0 \\ t=\frac{4}{3} \\ x=\frac{7}{3} \\ y=\frac{14}{3} \end{cases}$

إذن نقطة تقاطع (d) مع (XOY) هي $M_4(\frac{7}{3},\frac{14}{3},0)$

بنفس الطريقة نجد تقاطع (d) مع (XOZ) وهي النقطة $M_5(0,0,-7)$

وتقاطع (d) مع (YOZ) هي النقطة $M_6(0,0,-7)$

5) تقاطع (d) مع (xx') هو حل الجملة $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \\ y=0 \text{ و } z=0 \end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد $\begin{cases} t=-1 \\ t=\frac{4}{3} \end{cases}$

إذن لا توجد قيمة وحيدة لـ t وبالتالي d لا يقطع (xx') .

- تقاطع (d) مع (yy') هو حل الجملة $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=-4+3t \\ x=0 \text{ و } z=0 \end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد $\begin{cases} t=-1 \\ t=\frac{4}{3} \end{cases}$,

إذن لا توجد قيمة وحيدة لـ t وبالتالي d لا يقطع (yy') .

- تقاطع d مع (zz') هو حل للجملة $\begin{cases} x=1+t=0 \\ y=2+2t=0 \\ z=-4+3t \end{cases}$

وبعد حل هذه الجملة نجد $t=-1$ ، $x=0$ ، $y=0$ ، $z=-7$

إذن d يقطع (zz') في $(0,0,-7)$

تطبيق 14 دراسة الوضع النسبي لمستقيمين

إليك التمثيل الوسيطي للمستقيم d ، $\begin{cases} x=4+3t \\ y=-2+t \\ z=1-5t \end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

1) هل النقطتان $A(-2,-4,13)$ ، $B(7,-1,-4)$ تنتميان إلى d ؟
2) هل المستقيم d يوازي (AC) حيث $C(-8,-6,23)$ ؟
3) هل المستقيم d عمودي على (BD) حيث $D(9,2,-2)$ ؟

✓ الحل

1) النقطة A تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} -2=4+3t \\ 4=-2+t \\ 13=1-5t \end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $\begin{cases} t=-2 \\ t=-\dfrac{12}{5} \end{cases}$

t ليس وحيدا وبالتالي A لا ينتمي إلى d .

النقطة B تنتمي إلى d تعني $\begin{cases} 7=4+3t \\ -1=-2+t \\ -4=1-5t \end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $t=1$

t وحيدا وبالتالي B تنتمي إلى d .

2) شعاع توجيه d هو $\vec{u}(3,1,-5)$ وشعاع توجيه (AC) هو $\overrightarrow{AC}(-6,-2,10)$

بما أن $\overrightarrow{AC}=-2\vec{u}$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطيا مما يعني أن d و (AC) متوازيان.

3) مركبات الشعاع $\overrightarrow{BD}$ هي $(2,3,2)$

$$\overrightarrow{BD}.\vec{u}=2\times 3+3(1)+2\times(-5)=-1$$

بما أن $\overrightarrow{BD}.\vec{u}\neq 0$ فإن d ليس عموديا على (BD)

تطبيق 15 الوضع النسبي لمستويين

ليكن d و d' مستقيمين علما أن تمثيليهما الوسيطيين هما :

$d:\begin{cases} x=1-2t \\ y=2-2t \\ z=t \end{cases}$ ، $t\in\mathbb{R}$ ، $d':\begin{cases} x=8-s \\ y=2s \\ z=1-s \end{cases}$ ، $s\in\mathbb{R}$

1) بين أن هذين المستقيمين غير متوازيين
2) عين تقاطع هذين المستقيمين .

✓ الحل

1) ليكن $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ شعاعي توجيه d و d' على التوالي حيث $\vec{u}(-2,-2,1)$ ، $\vec{v}(-1,2,-1)$

بما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا فإن d و d' غير متوازين .

2) $M(x,y,z)$ تنتمي إلى $d\cap d'$ يعني أن $(s)\begin{cases} 1-2t=8-s \text{.....}(1) \\ 2-2t=2s \text{.......}(2) \\ t=1-s \text{.............}(3) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد $-1=8-3s$ ومنه $s=3$

وبتعويض قيمة s في المعادلة (3) نجد $t=-2$

تعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم d نجد $x=5$ ، $y=6$ ، $z=-2$

إذن نقطة التقاطع هي $(5,6,-2)$.

تطبيق 16 تعيين معادلة مستوي المعرف بمستقيمين

d و d' مستقيمان علما أن تمثيليهما الوسيطيين هما ،

$d:\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=-1+t \end{cases}$ و $d':\begin{cases} x=3+s \\ y=2-2s \\ z=m+2s \end{cases}$

حيث m وسيط حقيقي .

1) ادرس حسب قيم m تقاطع d و d' .
2) من أجل $m=-4$ اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) المعين بـ d و d' .

✓ الحل

$d:\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=-1+t \end{cases}$ $d':\begin{cases} x=3+s \\ y=2-2s \\ z=m+2s \end{cases}$

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعي توجيه d و d' حيث $\vec{u}(1,-1,1)$ ، $\vec{v}(1,-2,2)$

بما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا فإن d و d' غير متوازيين

- إحداثيات نقطة التقاطع إن وجدت تحقق $\begin{cases} 1+t=3+s \text{..........}(1) \\ 3-t=2-2s \text{........}(2) \\ -1+t=m+2s \text{.....}(3) \end{cases}$

من (1) نجد $t=2+s$ نعوضها في (2) نجد $3-2-s=2-2s$

ومنه $s=1$ وبالتالي $t=3$

نعوض t و s في (3) نجد $-2=m+2$ ومنه $m=-4$

إذن إذا كان $m=-4$ فإن d يقطع d' في النقطة $A(4,0,-2)$

وإذا كان $m\neq -4$ فإن d لا يقطع d' .

2) من اجل $m=-4$ فإن d و d' متقاطعان في A

المستوي (P) الذي يشملهما يكون شعاعي توجيهه هما $\vec{n}$ و $\vec{v}$ معادلته تكون من الشكل :

$ax+by+cz+d=0$

ناظم المستوي (P) هو $\vec{n}(a,b,c)$ ويحقق $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ و $\vec{n}\cdot\vec{v}=\vec{0}$

$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ تكافئ $a-b+c=0$ ......(1)

$\vec{n}\cdot\vec{v}=\vec{0}$ تكافئ $a-2b+2c=0$ .... (2)

$A(4,0,-2)$ تنتمي إلى (P) تكافئ $4a-2c+d=0$ .....(3)

بطرح (2) من (1) نجد $b-c=0$ ومنه $b=c$

تعوض b في (1) نجد $a=0$ ونعوض a في (3) نجد $d=2c$

بما أن $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ فإن $c\neq0$

إذن معادلة (P) هي $cy+cz+2c=0$ وبالقسمة على c نجد $y+z+2=0$

تطبيق 17 حساب المسافة بين نقطة و مستقيم بطريقتين

لتكن $A(0,1,3)$ و d مستقيم تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=2+4t\\y=2-2t\\z=2+4t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

1) لتكن δ المسافة الأصغرية بين النقطة A والنقطة M حيث M تنتمي إلى d

لتكن M نقطة من d ونعرف الدالة f من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ بحيث $f(t)=AM^2$

ا) عبر عن $f(t)$ بدلالة t .

ب) من اجل أي قيمة لـ t تكون الدالة f لها قيمة صغرى.

جـ) استنتج δ .

2) ليكن (P) المستوي المار من A والعمودي على d .

ا) عين شعاعا نظاميا لـ (P) . ب) اعط معادلة للمستوي (P) .

جـ) تحقق أن النقطة $B(2,2,2)$ تنتمي إلى d ثم احسب المسافة δ_B بين B و (P)

د) عبر عن δ بدلالة δ_B و AB ، ثم استنتج δ .

الحل ✓

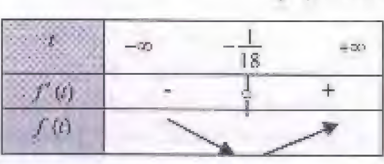
1) ا) لدينا $f(t)=AM^2=(2+4t-0)^2+(1-2t)^2+(2+4t-3)^2=36t^2+4t+6$

ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(t)=72t+4$

$f'(t)=0$ يكافئ $t=-\frac{1}{18}$

الدالة f لها قيمة صغرى هي $f(-\frac{1}{18})$

$f(-\frac{1}{18})=36(-\frac{1}{18})^2+4(-\frac{1}{18})+6=5.89$



t	$-\infty$	$-\frac{1}{18}$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	↘		↗

جـ) المسافة δ بين A و M هي القيمة الأصغرية للدالة $\sqrt{f}$

إذن $\delta=\sqrt{5.89}=2.43$

2) ا) $\vec{u}$ شعاع توجيه d وهو أيضا شعاع ناظم لـ (P) إذن $\vec{n}(4,-2,4)$

ب) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة كيفية من (P) تحقق $\vec{AM}\cdot\vec{n}=0$ ولكن $\vec{AM}(x,y-1,z-3)$

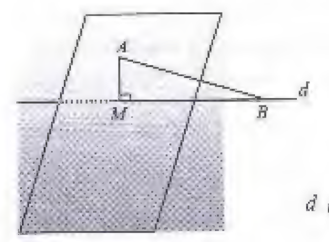
إذن $\vec{AM}\cdot\vec{n}=0$ يكافئ $2x-y+2z-5=0$

إذن معادلة (P) هي $2x-y+2z-5=0$

جـ) النقطة $B(2,2,2)$ تنتمي إلى d

يعني $\begin{cases}2=2+4t\\2=2-2t\\2=2+4t\end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $t=0$

إذن توجد قيمة وحيدة لـ t وهذا يعني أن B تنتمي إلى d



- المسافة بين B و (P) هي $\delta_B=\frac{|2\times2-2+4-5|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{1}{3}$

حسب نظرية فيثاغورث لدينا :

$AM^2+BM^2=AB^2$ أي $\delta^2+\delta_B^2=AB^2$

ومنه $\delta^2=AB^2-\delta_B^2=6-\frac{1}{9}=\frac{53}{9}$

إذن $\delta=2.43$

تطبيق 18 تقاطع مستو ومستقيم

d و d' مستقيمان علما أن تمثيليهما الوسيطيين هما :

$d:\begin{cases}x=3+k\\y=1-k\\z=-3+2k\end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$ و $d':\begin{cases}x=4-t\\y=2+3t\\z=-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

1) بين أن d و d' متقاطعان

2) عين معادلة المستوي (P) المحدد بـ d و d' .

3) عين تقاطع المستوي (P) والمستقيم d'' المار بالنقطة $A(2,0,-5)$ وشعاع توجيهه $\vec{w}(1,2,4)$

الحل ✓

1) لدينا $\vec{u}(1,-1,2)$ و $\vec{v}(-1,3,-1)$ شعاعي توجيه d و d' على التوالي.

الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي d و d' غير متوازيين

إذن فهما متخالفان (من مستويين مختلفين) وإما متقاطعان ولعرفة ذلك ندرس إمكانيات

وجود الثنائية (t,k) بحيث $(s)\begin{cases}3+k=4-t \;......(1)\\ 1-k=2+3t \;......(2)\\ -3+2k=-t \;......(3)\end{cases}$

من (3) نجد $t=-2k+3$ نعوض عبارة t في (1) نجد $3+k=4+2k-3$

ومنه $k=2$ و $t=-1$

الثنائية $(t,k)=(-1,2)$ تحقق (2)

إذن توجد نقطة A_1 مشتركة بين d و d' إحداثياتها $A_1(5,-1,1)$

2) ليكن $(P):\ ax+by+cz+d=0$ مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

ناظم (P) هو $\vec{n}(a,b,c)$ إذن $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ و $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ و $A_1\in(P)$

$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$ تكافئ $a-b+2c=0 \;......(3)$

$\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ تكافئ $-a+3b-c=0 \;......(4)$

$A_1\in(P)$ تكافئ $5a-b+c+d=0 \;......(5)$

بجمع (3) و (4) طرفا إلى طرف نجد $2b+c=0$ ومنه $c=-2b$

نعوض c في (3) نجد $a=5b$

نعوض a و c في (5) نجد $d=-7b$

إذن معادلة (P) هي $5bx+by-2bz-7b=0$

بما أن $b\neq0$ فإن $(P):5x+y-2z-7=0$

3) التمثيل الوسيطي لـ d'' هو $\begin{cases}x=2+t\\ y=0+2t\\ z=-5+4t\end{cases}$

بما أن $\vec{n}\cdot\vec{w}=-1$ فإن d'' يقطع (P) في نقطة B إحداثياتها حل للجملة :

$s'\begin{cases}x=2+t\\ y=2t\\ z=-5+4t=0\\ 5x+y-2z-7=0\end{cases}$

نعوض x,y,z في معادلة المستوي (P) نجد $5(2+t)+2t-2(-5+4t)-7=0$

بالتبسيط نجد $t=13$

إذن نقطة تقاطع المستوي (P) مع المستقيم d'' هي $B(15,26,47)$

تطبيق 19 تعيين تمثيل وسيطي لمستقيم

هل جملة المعادلتين الديكارتيتين التالية تعرف لنا مستقيما في الفضاء :

$\begin{cases}x+y=0\\ 2x+y-z+1=0\end{cases}$ في حالة نعم عين تمثيلا وسطيا له.

✓ الحل

بما أن $\frac{1}{2}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{0}{-1}$ فإن المستويين ذوا المعادلتين $x+y=0$ و $2x+y-z+1=0$

غير متوازين وبالتالي فالجملة $\begin{cases}x+y=0\\ 2x+y-z+1=0\end{cases}$ (s) تعرف مستقيما d:

الجملة (s) تكتب $\begin{cases}y=-x\\ z=x+1\end{cases}$ (s') وبوضع $x=t$ الجملة (s') تكتب $\begin{cases}x=t\\ y=-t\\ z=t+1\end{cases}$

وهذه الأخيرة تمثل تمثيلا وسيطيا لـ d شعاع توجيهه $\vec{w}(1,-1,1)$ ويمر بالنقطة $A(0,0,1)$.

تطبيق 20 تقاطع مستو مع مستقيم

$(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء. α ، β ، γ ثلاثة أعداد حقيقية غير معدومة.
نعتبر النقط $A(\alpha,0,0)$ ، $B(0,\beta,0)$ ، $C(0,0,\gamma)$

1) بين أن معادلة المستوي (ABC) هي من الشكل $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$

2) أوجد تمثيلا وسيطيا لمستقيم يمر من O ويعامد المستوي (ABC) ثم استنتج إحداثيات النقطة H مسقط النقطة O على المستوي (ABC) بدلالة α ، β ، γ

✓ الحل

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(-\alpha,\beta,0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-\alpha,0,\gamma)$ و $(ABC):ax+by+cz+d=0$
مع $(a,b,c)\neq(0,0,0)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ يكافئ $-a\alpha+b\beta=0 \;......(1)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ يكافئ $-\alpha a+c\gamma=0 \;.....(2)$

$A\in(ABC)$ يكافئ $a\alpha+d=0 \;.....(3)$

بطرح (2) من (1) نجد $b\beta-c\gamma=0$ ومنه $b=\frac{c\gamma}{\beta}$

نعوض b في (1) نجد $a=\frac{\gamma}{\alpha}c$

نعوض a في (3) نجد $d=-\gamma c$

إذن معادلة (P) تصبح $\frac{\gamma}{\alpha}cx+\frac{c\gamma}{\beta}y+cz-\gamma c=0$

وبالقسمة على $c\gamma$ نجد $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}-1=0$

2) شعاع توجيه المستقيم المطلوب هو ناظم (P)

إذن هذا المستقيم يمر من $O(0,0,0)$ وشعاع توجيهه $\vec{n}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\right)$

وبالتالي التمثيل الوسيطي لـ d هو $d:\begin{cases} x=\frac{1}{\alpha}t \\ y=\frac{1}{\beta}t \\ z=\frac{1}{\gamma}t \end{cases}$

H هي نقطة تقاطع d مع (P) وإحداثياتها تحقق $(s):\begin{cases} x=\frac{1}{\alpha}t \text{ .... (1)} \\ y=\frac{1}{\beta}t \text{ .... (2)} \\ z=\frac{1}{\gamma}t \text{ .... (3)} \\ \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}-1=0 \text{ ...... (4)} \end{cases}$

نعوض x ، y ، z في (4) نجد $\frac{t}{\alpha^2}+\frac{t}{\beta^2}+\frac{t}{\gamma^2}-1=0$

ومنه نستنتج $t=\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2}=0$

إذن إحداثيات النقطة H هي $H\left(\frac{1}{\alpha}t_0,\frac{1}{\beta}t_0,\frac{1}{\gamma}t_0\right)$

تطبيق 21 الوضع النسبي لمستقيم وسطح كرة

$(\vec{o},\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم للفضاء.

$A(-1,2,1)$ ، $B(1,-6,-1)$ ، $C(2,2,2)$ ، $I(0,1,-1)$ نقط منه.

1) اعط معادلة ديكارتية للمستوي (P) المار بالنقط A ، B ، C .

2) (q) مستوي ذو المعادلة $x+y-3z+2=0$ و (q') مستوي المعلم $(o,\vec{i},\vec{k})$

ا) لماذا (q) و (q') متقاطعان ؟

ب) عين نقطة E من Δ وشعاع توجيه له حيث Δ هو تقاطع (q) و (q')

3) عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة Σ مركزها I وطول نصف قطرها $\sqrt{26}$

4) نعتبر النقطتين $J(-2,0,0)$ و $k(1,0,1)$ عين تقاطع Σ والمستقيم (JK)

✓ الحل

1) $(P):ax+by+cy+d=0$ وناظمه $\vec{n}(a,b,c)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(2,-8,-2)$ ، $\overrightarrow{AC}(3,0,1)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ تكافئ $2a-8b-2c=0$ ......(1)

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ تكافئ $3a+c=0$ ......(2)

$A\in(ABC)$ تكافئ $-a+2b+c+d=0$ ......(3)

من (2) نجد $c=-3a$ ونعوض c في (1) نجد $b=a$

نعوض b و c في (3) نجد $d=2a$

إذن $(P):ax+ay-3az+2a=0$ بالقسمة على a نجد $x+y-3z+2=0$

2) لدينا $(q):x+y-3z+2=0$ و $(q'):y=0$

بما أن $\frac{0}{1}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{0}{-3}$ فإن (q) و (q') متقاطعان.

الجملة $\begin{cases} y=0 \\ x+y-3z+2=0 \end{cases}$ (s) هي جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم Δ

الجملة (s) تكتب $\begin{cases} x=3z-2 \\ y=0z+0 \\ z=1\times z+0 \end{cases}$ وبوضع $z=t$ تصبح $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=0+0t \\ z=0+1t \end{cases}$ ومنه $E(-2,0,0)$

وشعاع توجيه Δ مركباته هي $(3,0,1)$

3) معادلة سطح الكرة التي مركزها I ونصف قطرها $\sqrt{26}$ هي :

$(\Sigma):x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=26$

4) التمثيل الوسيطي للمستقيم (JK) هو $\begin{cases} x=-2+3t \\ y=0+0t \\ z=0+t \end{cases}$

بتعويض x ، y ، z في معادلة Σ نجد $t^2-2t-1=0$

وحلا هذه الأخيرة هما $t_1=1+\sqrt{2}$ و $t_2=1-\sqrt{2}$

إذن (JK) يقطع Σ في نقطتين $M_1(1+3\sqrt{2} \text{ ، } 0 \text{ ، } 1+\sqrt{2})$ و $M_2(1-3\sqrt{2} \text{ ، } 0 \text{ ، } 1-\sqrt{2})$

تطبيق 22 المستقيمات والمستوي في الفضاء

نعتبر النقط $A(4,0,0)$ ، $B(2,4,0)$ ، $C(0,6,0)$ ، $S(0,0,4)$ ،

$E(6;0;0)$ ، $F(0,8,0)$

1) بين أن E هي تقاطع المستقيمين (BC) و (OA) ، و F هي تقاطع (AB) و (OC)

2-ا) أوجد معادلة (SEF) .

ب) أوجد إحداثيات النقطة A' مرجح النقطتين $(A,1)$ و $(S,3)$

جـ) نعتبر المستوي (P) الموازي للمستوي (SEF) والمار من A' تحقق أن معادلة (P) هي $4x+3y+6z-22=0$.

3- المستوي (P) يقطع الأحرف $[SO]$ ، $[SA]$ ، $[SB]$ ، $[SC]$ من الهرم $SOABC$ في O' ، A' ، B' ، C' على الترتيب.

أ) احسب إحداثيات النقطة O'.
ب) تحقق أن إحداثيات C' هي $(0,2,\frac{8}{3})$
جـ) أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (SB) ثم استنتج إحداثيات النقطة B'
4) تحقق أن $O'A'B'C'$ متوازي أضلاع.

✓ الحل

1) لدينا $\overrightarrow{OA}(4,0,0)$ ، $\overrightarrow{OE}(6,0,0)$ ومنه $\overrightarrow{OE}=\frac{6}{4}\overrightarrow{OA}$

إذن النقط O ، E ، A على استقامة واحدة أي E تنتمي إلى (OA)

لدينا $\overrightarrow{BE}(4,-4,0)$ ، $\overrightarrow{BC}(-2,2,0)$ ومنه $\overrightarrow{BE}=-2\,\overrightarrow{BC}$

وبالتالي النقط B ، C ، E تقع على استقامة واحدة أي E تنتمي إلى (BC)

إذن $(BC)\cap(OA)=\{E\}$

بنفس الطريقة نجد $(OC)\cap(AB)=\{F\}$

2) أ) $(SEF):\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{z}{4}=1$

ب) لتكن (x,y,z) إحداثيات A' تحقق $\begin{cases}x=1\\y=0\\z=3\end{cases}$

إذن $A'(1,0,3)$

جـ) ليكن $\vec{n}$ ناظم لـ (P) وبما أن (P) يوازي (SEF) فإن $\vec{n}(\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{4})$

إذن معادلة (P) هي $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{z}{4}+d=0$

A' تنتمي إلى (P) يعني $\frac{1}{6}+\frac{3}{4}+d=0$ ومنه $d=-\frac{11}{12}$

إذن $(P):\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{z}{4}-\frac{11}{12}=0$ بالتبسيط نجد $(P):4x+3y+6z-22=0$

3) أ) التمثيل الوسيطي لـ (OS) هو $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=4t\end{cases}$

إحداثيات O' تحقق $\begin{cases}x=0\\y=0\\z=4t\\4x+3y+6z-22=0\end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $t=\frac{11}{12}$

ومنه $O'(0,0,\frac{11}{3})$

ب) لدينا $\overrightarrow{C'C}(0,4,-\frac{8}{3})$ ، $\overrightarrow{CS}(0,-6,4)$ لاحظ أن $\overrightarrow{CS}=-\frac{6}{4}\overrightarrow{C'C}$

$\overrightarrow{C'C}=\frac{4}{6}\overrightarrow{CS}$ وهذا يعني أن $C'\in[SC]$

بما أن $4\times0+3\times2+6\times\frac{8}{3}-22=0$ فإن $C'\in(P)$

وبالتالي $C'\in[SC]\cap(p)$

جـ) لدينا $\overrightarrow{SB}(2,4,-4)$ وبالتالي التمثيل الوسيطي لـ (SB) هو $\begin{cases}x=2t\\y=4t\\z=4-4t\end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

إحداثيات B' تحقق $\begin{cases}x=2t\\y=4t\\z=4-4t\\4x+3y+6z-22=0\end{cases}$ وبعد حل هذه الجملة نجد $B'(1,2,2)$

4) $\overrightarrow{A'B'}(0,2,-1)$ ، $\overrightarrow{O'C'}(0,2,-1)$ ومنه $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{O'C'}$

وبالتالي الرباعي $O'A'B'C'$ متوازي أضلاع.

تطبيق 23 تقاطع ثلاثة مستويات

نعتبر المستويات (P) و (D) و (R) معادلاتها على الترتيب ،
$x-y+z-2=0$ ، $x-z=0$ ، $-x+y+2z-1=0$
بين أن تقاطع هذه المستويات هي نقطة وحيدة A يطلب تعيين إحداثياتها .

✓ الحل

ندرس أولا تقاطع (P) و (D) ثم ندرس تقاطع ناتجهما مع المستوي (R)

$(S):\begin{cases}x-y+z-2=0.....(1)\\x-z=0..........(2)\end{cases}$

بما أن $\frac{1}{1}\neq\frac{0}{1}\neq\frac{-1}{1}$ فإن (P) و (D) متقاطعان في مستقيم d

نضع $x=t$ ومنه $z=t$ و $y=2t-2$ إذن $d:\begin{cases}x=t\\y=2t-2\\z=t\end{cases}$ مع $t\in\mathbb{R}$

ندرس تقاطع d مع (R) $S'\begin{cases}x=t\\y=2t-2\\z=t\\-x+y+2z-1=0\end{cases}$

نعوض عبارة كل من x ، y ، z في معادلة (R) نجد $t=1$

إذن $x=1$ ، $y=0$ ، $z=1$

وبالتالي $(P)\cap(D)\cap(R)=\{A(1,0,1)\}$

تطبيق 24 المرجح والتحويلات النقطية

ABC مثلث ، I مرجح الجملة $(C,1)$،$(B,2)$ و J مرجح $(A,-1)$، $(B,2)$
و G مرجح $(A,-1)$، $(B,2)$ ، $(C,1)$
1) بين أن G هي تقاطع المستقيمين (AI) و (CJ)
2) نفرض أن A و C ثابتتان وأن B تمسح المستقيم Δ بحيث :
(AC) و Δ لا ينتميان إلى نفس المستوي.
ا) بين أن G صورة B بانسحاب يطلب تعيين شعاعه.
ب) استنتج المحل الهندسي لـ G لما B تمسح Δ .

الحل ✓

1) لدينا من المعطيات :

$$\begin{cases} \overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0} \\ -\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\vec{0} \\ -\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \end{cases}$$

$$-\overrightarrow{GA}+2(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB})+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$$

$$-\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GI}+(2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})=\vec{0}$$

$\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{GI}$ وهذا يعني أن G تنتمي إلى (AI)

$$-(\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JA})+2(\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB})+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{GJ}=-\overrightarrow{GC}$ ومنه (G) تنتمي إلى (CJ)
إذن $(CJ)\cap(AI)=\{G\}$

2) ا) $-\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{AC}$ ومنه $\overrightarrow{GB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

إذن (G) هي صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{V}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ب) بما أن G هي صورة B و B تمسح مستقيما، وصورة مستقيم بالانسحاب هو مستقيم فإن G تمسح مستقيما .

تمارين و مسائل

1 - $ABCDEFGH$ مكعب حرفه 1
I هي مركز ثقل المثلث CFH و J مركز ثقل المثلث BDE . و k مرجح الجملة $(A,1)$، $(B,1)$ ، $(C,1)$، $(D,1)$، $(E,1)$، $(F,1)$، $(G,1)$، $(H,1)$.
نعتبر المعلم $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$
1- احسب إحداثيات النقط I, J, K
2- اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AG)
2- بين أن النقط I, J, K تنتمي إلى المستقيم (AG) ثم حدد الأعداد u, t, s بحيث :
$\overrightarrow{AI}=s\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AJ}=t\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AK}=u\overrightarrow{AG}$

2 - لتكن (C) دائرة مركزها O ونصف قطرها r
E نقطة من القرص الذي مركزه O و نصف قطره r
(d) و (d') مستقيمان متعامدان ومتقاطعان في E بحيث :
(d) يقطع الدائرة (C) في النقطتين A و C و (d') يقطعها في النقطتين B و D
لتكن I و J منتصفي $[AC]$ و $[BC]$ على التوالي.
1- بين أن الرباعي $OIEJ$ مستطيل.
2- استنتج أن النقطة G مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$، $(D,1)$ هي نقطة ثابتة من المستوي لما يتغير المستقيمان (d) و (d') مع بقائهما متعامدان في النقطة E .

3 - $ABCD$ رباعي وجوه ولتكن P، Q و R ثلاث نقط حيث أن الرباعيات $ABPC$ ، $ABQD$ و $ACRD$ متوازيات أضلاع.
1-أ) بين أن P هي مرجح الجملة $(A,-1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$
ب) عبر عن Q كمرجح للنقط A ، B ، D .
جـ) عبر عن R كمرجح للنقط A ، C ، D .
2- باستعمال الخاصية التجميعية وباختيار مناسب للمرجح I للنقط A ، B ، C ، D المزودة بمعاملات يطلب تعيينها.
بين أن المستقيمات (DP) ، (CQ) و (BR) متقاطعة في النقطة I ثم حدد موضعها على كل مستقيم.

4 - $ABCD$ رباعي وجوه ، ولتكن النقطتين I و J منتصفي $[AB]$ و $[CD]$ على التوالي

1-أ) لتكن G_1 مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,-1)$ ، $(D,1)$

عبر عن $\overrightarrow{IG_1}$ بدلالة $\overrightarrow{CD}$ ، ثم علم النقط I ، J و G_1

ب) لتكن G_2 مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(D,2)$

بين أن G_2 منتصف $[ID]$ ثم علمها .

جـ) بين أن IG_1DJ متوازي أضلاع ثم استنتج وضعية G_2 بالنسبة إلى G_1 و J

2- m عدد حقيقي، ولتكن G_m مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,m-2)$ ، (D,m)

أ) عين المجموعة E مجموعة قيم العدد m التي من اجلها يكون المرجح G_m موجودا .

ب) نفرض فيما يلي أن $m \in E$ بين أن الشعاع $m\,\overrightarrow{JG_m}$ ثابت.

جـ) استنتج المجموعة F مجموعة النقط G_m لما m تمسح E

5 - في المستوي نعتبر المثلث ABC المتقايس الساقين الذي راسه A وارتفاعه $[AH]$ بحيث $AH = BC = 4$

1- G هي مرجح الجملة $(A,2)$ ، $(B,1)$ ، $(D,1)$ برر إنشائك لـ G ثم علمها.

2- لتكن M نقطة كيفية من المستوي ؛

أ) بين ان الشعاع $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ شعاع طويلته 8

ب) عين وارسم (ξ) مجموعة النقط M بحيث $\left\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| \vec{V} \right\|$

3- نعتبر الجملة $(A,2)$ ، (B,n) ، (C,n) ؛ بحيث n عدد طبيعي ثابت ؛

أ) بين ان G_n مرجح هذه الجملة موجود ، ثم علم النقط G_0 ، G_1 ، G_2

ب) بين أن النقطة G_n تنتمي إلى القطعة $[AH]$

جـ) احسب المسافة AG_n بدلالة n ثم عين نهاية AG_n لما n تؤول إلى $+\infty$

ثم حدد موضع G_n في هذه الحالة.

د) لتكن (ξ_n) مجموعة النقط M بحيث $\left\| 2\overrightarrow{MA} + n\,\overrightarrow{MB} + n\,\overrightarrow{MC} \right\| = n \left\| \vec{V} \right\|$

بين أن (ξ_n) دائرة تمر بالنقطة A محددا مركزها ونصف قطرها R_n ثم أنشئ (ξ_n) .

6 - $ABCD$ رباعي وجوه ، ولتكن النقط I ، J و K منتصفات القطع $[AD]$ و $[BC]$ و $[IJ]$ على التوالي. و G هي مركز ثقل المثلث ABC .

بين أن النقط G ، K و D على استقامة واحدة.

7 - ليكن متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ ولتكن النقطتان I و J منتصفي القطعتين $[AC]$ و $[FH]$ على التوالي.

1) ادرس تقاطع المستقيم (BJ) و المستوي (ACH)

2) بين أن المستقيم (DJ) و المستوي (ACH) متقاطعان معينا نقط تقاطعهما .

8 - بين أنه يوجد مستقيم وحيد (d) يمر بالنقطة $A(-3,1,2)$ ويوازي كلا من المستويين (P) و (P') معادلتيهما على الترتيب ؛

$x - y - 2z + 3 = 0$ و $2x + y - 7 = 0$ اعطا تمثيلا وسطيا لـ (d)

9 - نعتبر النقط $A(2,-1,0)$ ، $B(1,1,-3)$ ، $C(3,-1,1)$ والشعاعين ؛

$\vec{U}(1,1,-1)$ و $\vec{V}(-1,0,1)$

عين تقاطع المستقيم (AB) و المستوي (P) المزود بالمعلم $(C,\vec{U},\vec{V})$

10 - نعتبر النقط $A(a,0,0)$ ، $B(0,b,0)$ ، $C(0,0,c)$ من الفضاء بحيث الأعداد الحقيقية a ، b ، c غير معدومة.

1- عين معادلة المستوي (ABC)

2- عين معادلة المستوي (P) المار بالنقطة $O(0,0,0)$ والموازي للمستوي (ABC)

3- عين معادلة المستوي (P') المار بالنقطة O ومنتصف القطعتين $[CA]$ و $[CB]$

4- اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) تقاطع المستويين (P) و (P')

5 عين الوضعية النسبية للمستقيمين (d) و (AB)

11 - $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$ معلم متعامد ومتجانس للفضاء.

G مرجح الجملة $(A,1)$ ، $(B,1)$ ، $(C,1)$

1- عين إحداثيات النقطة G ثم بين أن المستقيم (OG) عمودي على المستوي (ABC)

2- النقط $A'(2,0,0)$ ، $B'(0,2,0)$ ، $C'(0,0,3)$ تحدد مستويا $(A'B'C')$

أ) بين أن المعادلة $3x+3y+2z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(A'B'C')$

ب) بين أن $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستقيم (AC) إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي t بحيث $x=1-t$ ، $y=0$ ، $z=t$

جـ) عين إحداثيات النقطة K تقاطع المستقيم (AC) و المستوي $(A'B'C')$

3-أ) عين إحداثيات النقطة L تقاطع المستقيم (BC) و المستوي $(A'B'C')$

ب) بين أن المستقيمات (AB) ، $(A'B')$ و (KL) متوازية

جـ) حدد تقاطع المستويين (ABC) و $(A'B'C')$ باستعمال النتائج السابقة.

12 - لتكن S نقطة ثابتة من كرة ثابتة (Σ) مركزها النقطة Ω .

نعتبر الرباعيات الوجوه $SABC$ المرسومة داخل الكرة (Σ) وبحيث أحرفها المرسومة من S متعامدة مثنى مثنى